L1 MASS : Algèbre Linéaire   Cours 24/26 janvier 2006

Systèmes linéaires

Systèmes linéaires échelonnées

Chaque équation d'un système linéaire a une **variable de tête**, qui est la première variable qui y apparaît avec un coefficient non nul. Dans les deux systèmes suivants on a encadré la variable en tête de chaque équation.

$$\begin{cases} \boxed{x} - 3y + 6z = -1, \\ \boxed{2x} - 5y + 10z = 0, \\ \boxed{-8y} + 17z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{y} + 2z + 2w = 2, \\ \boxed{2x} + 2y - z - w = 2. \end{cases}$$

Un système linéaire est dit **échelonné** si la variable en tête de chaque équation est strictement plus à droite que la variable en tête de l'équation précédente. Les deux systèmes ci-dessus ne sont pas échelonnés, mais les systèmes suivants le sont.

$$(*) \qquad \begin{cases} \boxed{2x_1} - x_2 + x_3 = 1, \\ \boxed{x_2} - 2x_3 = -2, \\ \boxed{x_3} = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x} + 2y + 4z = 0, \\ \boxed{z} + w = 4, \end{cases}$$

On résout les systèmes échelonnés par une méthode parfois appelée **substitution à rebours**. On traite les équations en commençant par la dernière équation et ensuite en montant les équations une par une. On se sert de chaque équation pour résoudre pour sa variable en tête, et dans la solution trouvée on substitue pour éliminer les variables dont les valeurs sont déjà connues (les variables en tête des lignes au dessous). Par exemple, pour le système à gauche dans (*), on résout

$$\begin{aligned} x_3 &= 3, \\ x_2 &= 2x_3 - 2 \\ &= 2 \cdot 3 - 2 = 4, \\ 2x_1 &= x_2 - x_3 + 1 \\ &= 4 - 3 + 1 = 2, \\ x_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2x_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \end{aligned} \qquad \textbf{Solution :} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1. Résolvez le système $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_3 = 4. \end{cases}$

Souvent il y a plus de variables que d'équations, comme dans le système droit de (*). Quand cela se passe, il y a des variables, dites **variables libres**, qui ne sont variable en tête d'aucune ligne. (Dans le système droit de (*), y et w sont des variables libres.) En résolvant un système échelonné avec plus de variables que d'équations, on arrive à exprimer les différentes variables de tête en fonction des variables libres, mais pas plus. Pour le système droit de (*), on résout :

$$(\dagger) \qquad \begin{aligned} z &= -w + 4, \\ x &= -2y - 4z \\ &= -2y - 4(-w + 4) \\ &= -2y + 4w - 16. \end{aligned} \qquad \textbf{Solutions :} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + 4w - 16 \\ y \\ -w + 4 \\ w \end{pmatrix}.$$

La solution n'est pas unique et dépend de deux paramètres indépendants y et w, qui sont les variables libres.

Comme notre méthode de solution fait exprimer les différentes de tête en fonction des variables libres, on appelle parfois **variables dépendantes** l'ensemble des variables en tête de toutes les lignes.

Il convient de réécrire les solutions comme (†) en utilisant les notations de sommes de vecteurs et multiplication externe de vecteurs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \qquad a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, la solution (†) se réécrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+4w-16 \\ y \\ -w+4 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+4w-16 \\ 1y+0w+0 \\ 0y-1w+4 \\ 0y+1w+0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Résolvez le système $\begin{cases} 2x+2y-z=2, \\ y+2z=2. \end{cases}$

Quand on a un système linéaire échelonné de r équations en n variables, alors r des variables seront des variables en têtes des différentes équations, et il en reste alors $n-r$ variables libres. D'où

> Les solutions d'un système linéaire échelonné de r équations en n variables dépendent de $n-r$ paramètres indépendants. Ces paramètres sont les $n-r$ variables libres, c'est-à-dire les variables autres que les variables de tête des r équations.

Opérations élémentaires

On réduit un système linéaire général à un système échelonné par une suite d'opérations dites **opérations élémentaires**. Il y en a trois types.

Il y a trois types d'opération élémentaire.

1. On permute deux équations.
2. On multiplie (ou divise) une des équations par un $r \neq 0$ dans $\mathbb{R}$.
3. On ajoute (ou soustrait) un multiple d'une équation à une autre équation.

Voici un exemple où on rend un système échelonné et convenable en utilisant les trois types d'opération élémentaire.

$$\begin{cases} 4x+7y=5, \\ x+y=2, \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightsquigarrow E_2} \begin{cases} x+y=2, \\ 4x+7y=5, \end{cases} \xrightarrow{E_2 \rightsquigarrow E_2-4E_1} \begin{cases} x+y=2, \\ 3y=-3, \end{cases} \xrightarrow{E_2 \rightsquigarrow \frac{1}{3}E_2} \begin{cases} x+y=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

Il n'y a pas de notation standard pour les différentes opérations élémentaires. Parfois on utilise des notations qui ressemblent à ce qui est marqué ci-dessus.

Les opérations élémentaires sont inversibles. Pour chaque opération élémentaire il y a une autre qui la défait. Par exemple, les trois opérations ci-dessus sont inversées par

$$\begin{cases} x+y=2, \\ y=-1. \end{cases} \xrightarrow{E_2 \rightsquigarrow 3E_2} \begin{cases} x+y=2, \\ 3y=-3, \end{cases} \xrightarrow{E_2 \rightsquigarrow E_2+4E_1} \begin{cases} x+y=2, \\ 4x+7y=5, \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightsquigarrow E_2} \begin{cases} 4x+7y=5, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Deux systèmes linéaires sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions. Une opération élémentaire transforme un système en un système équivalent. En effet, il est facile de voir pour chacun des trois types d'opération élémentaire, que toute solution du système de départ est aussi une solution du système transformé. Mais la réciproque est aussi vrai : toute solution du système transformé est aussi une solution du système de départ, parce qu'on peut revenir au système de départ en appliquant l'opération élémentaire inverse.

Pivots : la méthode de Gauss

L'opération essentielle pour réduire un système linéaire à la forme échelonnée est le **pivotage vers le bas**. On désigne une variable dans une des équations comme **pivot**, et on fait disparaître cette variable des équations en dessous en ajoutant ou soustrayant les multiples nécessaires de l'équation contenant le pivot. Par exemple le système suivant se réduit en forme échelonnée après deux pivotages. Les pivots successifs sont indiqués.

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z = 2, \\ 2x + y - z = 2, \\ x + 2y + 2z = 6. \end{cases} \xrightarrow[E_3 \rightsquigarrow E_3 - E_1]{E_2 \rightsquigarrow E_2 - 2E_1} \begin{cases} x + y + z = 2, \\ \boxed{-y} - 3z = -2, \\ y + z = 4, \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightsquigarrow E_3 + E_2} \begin{cases} x + y + z = 2, \\ -y - 3z = -2, \\ -2z = 2. \end{cases}$$

Ces pivotages sont des compositions d'opérations élémentaires, et on obtient à la fin un système échelonné équivalent au système de départ. Le système échelonné se résout facilement, et on trouve une solution unique $(x, y, z) = (-2, 5, -1)$.

Normalement le premier pivotage se fait autour de la première équation et la première variable.

Le deuxième pivotage se fait normalement autour de la deuxième équation et la deuxième variable, ou au moins la première variable qui apparaît au dessous de la première équation, etc.

Le coefficient à un pivot ne peut pas être 0. Donc parfois il faut permuter des équations avant de pivoter.

Il peut être commode aussi de choisir un pivot oú le coefficient est 1 ou -1, parce que cela simplifie les calculs à la main. Si ce pivot n'est pas sur la bonne ligne, on permute les équations. Par exemple :

$$\begin{cases} 2y + z = 2, \\ 2x + 2y + z = 6, \\ \boxed{x} + 2y + z = 4. \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightsquigarrow E_3} \begin{cases} \boxed{x} + 2y + z = 4, \\ 2x + 2y + z = 6, \\ 2y + z = 2. \end{cases} \xrightarrow{E_2 \rightsquigarrow E_2 - 2E_1} \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ \boxed{-2y} - z = -2, \\ 2y + z = 2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3 \rightsquigarrow E_3 + E_2} \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -2y - z = -2, \\ 0 = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ -2y - z = -2. \end{cases}$$

Dans cet exemple les pivotages font apparaître une équation triviale $0 = 0$ que l'on peut supprimer, et le système de trois équations à trois inconnues est équivalent à un système échelonné de deux équations à trois inconnues. Donc il y a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre. La solution générale est $(x, y, z) = (2, 1 - \frac{1}{2}z, z)$ avec z quelconque.

Encore pire, les pivotages peuvent faire apparaître une ligne du genre $0 = 1$ ou $0 = 9$. Par exemple :

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + 2y + 3z = 4, \\ x + 3y + 5z = 8. \end{cases} \xrightarrow[E_3 \rightsquigarrow E_3 - E_1]{E_2 \rightsquigarrow E_2 - E_1} \begin{cases} x + y + z = 2, \\ y + 2z = 2, \\ 2y + 4z = 6, \end{cases} \xrightarrow{E_3 \rightsquigarrow E_3 - 2E_2} \begin{cases} x + y + z = 2, \\ y + 2z = 2, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution : il n'y a pas de valeurs de x, y, z rendant vraies toutes les équations du système, car $0 = 2$ est faux quelque soient x, y, z.

1. On peut toujours réduire un système linéaire à un système échelonné équivalent par des pivotages, échanges de lignes, et autres opérations élémentaires.
2. Parfois le système échelonné contient moins d'équations non triviales que le système de départ. C'est le cas quand les opérations font apparaître des équations $0 = 0$.
3. Quand les opérations font apparaître une équation tautologiquement fausse de la forme $0 = b$ avec un b **non nul**, le système linéaire n'a pas de solution.

Matrices augmentées

La **matrice augmentée** d'un système linéaire de r équations en n inconnues est la matrice de r lignes et $n+1$ colonnes regroupant les coefficients des inconnues et, dans la dernière colonne, le membre de droite du système. Par commodité la dernière colonne est séparée des autres par une ligne verticale. Voici un système linéaire et sa matrice augmentée.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 8, \\ x + 4y + z = 10, \\ y - z = 3. \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Les opérations élémentaires sur les équations d'un système linéaire jouent sur les coefficients et le membre de droite, et on peut les faire dans la matrice augmentée. Cela évite de réécrire constamment des x, y, z, $+$ et $=$. Les **opérations élémentaires sur les lignes** d'une matrice sont les analogues des opérations élémentaires sur les équations d'un système, donc :

1. La permutation de deux lignes de la matrice.
2. La multiplication d'une ligne de la matrice par un $r \neq 0$ dans $\mathbb{R}$.
3. L'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Une matrice est en **forme échelonnée en ligne** si chaque ligne (non identiquement nulle) commence avec strictement plus de zéros que la ligne précédente.

La matrice augmentée ci-dessus se réduit à sa forme échelonnée en ligne par les opérations élémentaires suivantes sur ses lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \rightsquigarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \rightsquigarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ces opérations correspondent à une réduction du système linéaire ci-dessus au système

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 8, \\ y - z = 2, \\ 0 = 1, \end{cases}$$

qui n'a pas de solution.