M1 MPA : Algèbre et Arithmétique 2016–2017
Feuille d'exercices n° 4

I. Soit M un module sur un corps A et soit $X \subset M$.

(a) Montrer que X est une famille libre de M si et seulement si pour tout A-mdodule N , toute application $\varphi\colon X \to N$ s'étend en un morphism $M \to N$ de A-modules.

(b) Montrer que X est une base de M si et seulement si pour tout A-module N, toute application $\varphi\colon X \to N$ s'étend de manière unique en un morphism $M \to N$ de A-modules.

Ces deux propriétés sont-elles vraies pour $A = \mathbf{Z}$?

II. Soit A un anneau commutatif intègre, et M un A-module. La *torsion* de M est

$$\operatorname{Tors}(M) = \{m \in M \mid \text{il existe } 0 \neq a \in A \text{ avec } am = 0\}.$$

(a) Montrer que $\operatorname{Tors}(M)$ est un sous-module de M.

(b) Quelle est la torsion des $\mathbf{Z}$-modules $\mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, et $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$?

(c) Montrer que la torsion de $M/\operatorname{Tors}(M)$ est nul.

III. Soit M un A-module et $a \in A$. La *a-torsion* de M est

$$_aM = \{m \in M \mid am = 0\}.$$

(a) Montrer que $_aM$ est un sous-module de M.

(b) Quelle est la 2-torsion de $\mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, et $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$?

(c) Supposons A principal, et $a, b \in A$ premiers entre eux. Montrer qu'on a $_{ab}M = {}_aM \oplus {}_bM$.

IV. Soit A un anneau commutatif non nul et I un idéal de A.

(a) Montrer que A/I est un A-module de type fini. Quel est le nombre minimal de générateurs de A/I ?

(b) Supposons $I \neq \{0\}$ et $I \neq A$. Montrer que A/I n'est pas un module libre.

(c) Soit A un anneau non nul tel que tout A-module de type fini est libre. Montrer que A est un corps.

V. Montrer que les notions suivantes sont équivalentes :

(a) Les $\mathbf{Z}[i]$-modules.

(b) Les groupes abéliens (G, σ) munis d'un automorphisme $\sigma\colon G \to G$ tel qu'on ait $\sigma \circ \sigma = -\operatorname{Id}_G$.

VI. Soit $A = \mathbf{C}[x, y]$ est $I = (x, y)$.

(a) Montrer que x et y engendrent I comme A-module, mais qu'ils n'en sont pas une base.

(b) Montrer qu'un idéal de A est libre comme un A-module si et seulement si c'est un idéal principal.

VII. Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie, et $u\colon E \to E$ un endomorphisme. On définit une structure de $K[T]$-module sur E par $P(T)x = P(u)x$. On note ce $K[T]$-module E_u.

(a) Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que F est un $K[T]$-sous-module de E si et seulement si F est stable sous u.

(b) Notons par $\mu_u(T)$ le polynôme minimal de u. Montrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si $P(T)$ est premier avec $\mu_u(T)$. (Bezout)

(c) Soit P un diviseur irréductible de μ_u, et supposons que $\mu_u = P^N Q$ avec P et Q premiers entre eux. Montrer qu'il existe $S \in K[T]$ tel que $S(u)$ soit la projection sur $\ker P^N$ parallèle à $\ker Q$.

VIII. Soit K un corps et $A \in M_n(K)$.

(a) Montrer que $E = K^n$ est un $K[T]$-module pour la multiplication $P(T)x = P(A)x$. On note ce $K[T]$-module E_A.

(b) Montrer que $A, B \in M_n(K)$ sont semblables si et seulement si E_A et E_B sont isomorphes.

(c) Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le $\mathbf{C}[T]$-module E_B est-il monogène ?

(d) Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbf{C}$ le $\mathbf{C}[T]$-module E_C est-il monogène ?

(e) Soit $P \in K[T]$ un polynôme de degré $d \geq 1$. La multiplication par T induit un K-endomorphisme de $K[T]/(P)$. La *matrice compagnon* $C(P)$ est la matrice de cet endomorphisme dans la K-base $1, T, \ldots, T^{d-1}$ de $K[T]/(P)$.

i. Montrer que $E_{C(P)}$ est un $K[T]$-module isomorphe à $K[T]/(P)$.

ii. Quel est le polynôme minimal de $C(P)$?

iii. Notons par B la transposée de $C(P)$. Montrer que E_B et $E_{C(P)}$ sont isomorphes en tant que $K[T]$-modules.

(f) Montrer que A et sa transposée sont semblables.