Université de Nice - Sophia Antipolis **CAPES**
Année 2004 - 2005

Notes de travail par J. YAMEOGO
Laboratoire J.A. Dieudonné
Bureau 721 - 3ème étage
Tél. : 04 92 07 62 96
e-mail : yameogo@math.unice.fr

Notes de Cours/TD pour la préparation au concours de capes externe de mathématiques.

Algèbre linéaire

`(Paragraphe 2.III. du programme complémentaire)`

Bibliographie :

- M. QUEYSANNE
  Algèbre
  1^{er} cycle scientifique, préparation aux grandes écoles.
  Armand Colin - Collection U
- ROGER GODEMENT
  Cours d'algèbre
  Hermann - Collection Enseignement des sciences
- L. LESIEUR, R. TEMAM, J. LEFEBVRE
  Compléments d'algèbre linéaire
  Mathématiques spéciales, 1^{er} cycle, 2^{e} année.
  Armand Colin - Collection U

Dans tout ce qui suit, le corps de base K sera un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

Travail 1.1 Pour commencer, s'assurer que l'on sait ce que recouvrent des mots-clés comme

- **corps**
- **sous-corps**
- **espace vectoriel sur un corps**

Ensuite se donner des exemples **(une infinité d'exemples)**.
Se convaincre enfin qu'une auto-évaluation et une consolidation des acquis par des exercices est nécessaire.

Travail 1.2 V est un K-espace vectoriel, X est un ensemble non vide et $V^X = \{f : X \longrightarrow V\}$ (l' ensemble des applications de X dans V).
Mettre une structure de K-espace vectoriel sur V^X. Donner des exemples.

Travail 1.3 V est un K-espace vectoriel et X est un ensemble non vide. Pour $f \in V^X$, on appelle **support** de f l'ensemble

$$supp(f) = \{x \in X, f(x) \neq 0_V\}.$$

On dit que f est à support fini lorsque $card(supp(f))$ est fini.

1. Soit Y un sous-ensemble non vide de X.
   $V_Y = \{f \in V^X, supp(f) \subset Y\}$ est un sous-espace vectoriel de V^X.
2. L'ensemble des $f \in V^X$ à support fini est un sous-espace vectoriel de V^X.

Travail 1.4 Soit $E = K[X]_n$ le K-espace vectoriel des polynômes à une variable, à coefficients dans K, de degré au plus n ($n \geq 1$).

1. $V = \{P \in E \mid \exists x \in K, P(x) = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2. Soient $a, b \in K, (a \neq b)$. On considère $W_a = \{P \in E \mid P(a) = 0\}$ et $W_b = \{P \in E \mid P(b) = 0\}$.
   a) Vérifier que W_a (resp. W_b) est un sous-espace vectoriel de E.
   $$W_a + W_b = ?$$
   b) Pour $n \geq 2$, donner une base de $W_a \cap W_b$.
   c) On suppose $n \geq 2$. Soit F_a (resp. F_b) un supplémentaire de W_a (resp. W_b) dans E. $F_a + F_b$ est-il un supplémentaire de $W_a \cap W_b$? Donner une base d'un supplémentaire de $W_a \cap W_b$.

Travail 1.5 Soit q la forme quadratique définie sur K^3 (K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6xy + 4xz + 6yz.$$

L'ensemble $\mathcal{I}_K$ des vecteurs isotropes de q est-il un sous-espace vectoriel de K^3 ?
Même question pour la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = -3x^2 - 5y^2 - 8xy + 3xz + 5yz.$$

Décrire une méthode générale (i.e valable pour toute forme quadratique q sur K^3) permettant de répondre aux questions ci-dessus.

Travail 1.6 On définit une forme quadratique q sur K^3 en vous donnant sa matrice $M(q)$ (symétrique) dans une base de K^3 et on vous demande si l'ensemble $\mathcal{I}_K$ des vecteurs isotropes de q est un sous-espace vectoriel de K^3. Que faites-vous ?

Définitions 1.7 Soient E et F deux K-espaces vectoriels.

1. L'ensemble $\mathcal{L}_K(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un K-espace vectoriel. Lorsque $E=F$ on parle d'**endomorphismes** de E.
2. L'espace des endomorphismes de E $End_K(E)$ muni de la loi de composition des applications est une K-algèbre.
   `Faites en la vérification après avoir rappelé`
   `la définition d'une` K`-algèbre.`
3. Soit $f : E \to F$ une application linéaire bijective. *Alors* $f^{-1} : F \to E$ *est linéaire*. On dit alors que les deux K-espaces vectoriels E et F sont **isomorphes**. Lorsque $E=F$, on parle d'**automorphisme** de E.
4. L'ensemble des automorphismes de E ($Aut(E)$) muni de la loi de composition des applications est un groupe.
   `Faites en la vérification après avoir rappelé`
   `la définition d'un groupe.`

Travail 1.8 Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E, $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow E$ l'application linéaire définie par $f(x_1,x_2) = x_1+x_2$. Montrer que $Ker(f)$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.

Travail 1.9 Soit E un K-espace vectoriel. On dit que $p \in End_K(E)$ est un **projecteur** si $p^2 = p$ ($p^2 = p \circ p$). Montrer que si $p \in End_K(E)$ est un projecteur, alors on a $E = Ker(p) \oplus Im(p)$. La réciproque est-elle vraie ?

Définition 1.10 (Famille libre)

1. Soient E un K-espace vectoriel, $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ une famille finie d'éléments de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** (ou linéairement indépendante) si
   la relation $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0 \quad (\lambda_i \in K)$
   entraîne $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.
   S'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ *non tous nuls tels que* $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0$, *la famille* $\mathcal{F}$ *est dite* **liée**.
2. Une famille quelconque $\mathcal{F}$ d'éléments de E est dite libre si toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$ est libre.
3. Si $\mathcal{B} \subset E$ est une **famille génératrice et libre**, on dit que $\mathcal{B}$ est **une base** de E.

Travail 1.11 La famille $\mathcal{F} = \{sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions rélles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$?

2 Quelques définitions et résultats fondamentaux

Définition 2.1 Un K-espace vectoriel E est dit **de dimension finie** s'il admet un système fini de générateurs.

Théorème 2.2 *Soient E un K-espace de dimension finie, $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une partie finie de E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *$\mathcal{B}$ est une base de E*
2. *$\mathcal{B}$ est une partie génératrice minimale* (pour la relation d'inclusion)
3. *$\mathcal{B}$ est une partie libre maximale.*

Théorème 2.3 *Soient E un K-espace de dimension finie, $\mathcal{L} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une partie libre de E, $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ une partie génératrice de E.*
Alors on a $n \leq p$.

Théorème 2.4 (Existence de base en dimension finie)
Soient E un K-espace de dimension finie, $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ une partie génératrice finie de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ une partie libre.
Alors il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}.$$

Théorème 2.5 (Théorème de la base incomplète)
Soient E un K-espace de dimension finie, $\mathcal{L}$ une partie libre finie, $\mathcal{F}$ une partie génératrice finie de E.
Alors il existe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{L} \cup \mathcal{H}$ est une base de E.

Théorème 2.6 (dimension)
E étant un K-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases de E ont même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E.

Travail 2.7
Tout K-espace vectoriel E de dimension finie n est isomorphe à K^n.

Définition 2.8 (Rang d'une famille de vecteurs)
Soient E un K-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$, noté $rg(\mathcal{F})$, la dimension (*supposée finie*) du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$.

Définition 2.9 (Rang d'une application linéaire)
Soient E, F deux K-espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que E est de dimension finie.
On appelle rang de f, noté $rg(f)$, la dimension du sous-espace vectoriel $Im(f) \subset F$ de F.

Théorème 2.10 *Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ où E est de dimension finie n. Alors on a*

$$rg(f) = dim_K(E) - dim_K(Ker(f)).$$

Travail 2.11 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $f \in End_K(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que $Im(f) = Im(f^2)$ entraîne $E = Ker(f) \oplus Im(f)$. La réciproque est-elle vraie ?

Travail 2.12 $E = \mathbb{R}[X]_2$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une variable, à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré au plus 2.
Soit $f \in End_K(E)$ l'endomorphisme de E qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $(X^3 + 1)$.
Quel est le rang de f ?

Travail 2.13 Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies, $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.

1. Comparer $rg(f + g)$ et $(rg(f) + rg(g))$.
2. Montrer que $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g)$.

Travail 2.14 Soit V un K-espace vectoriel. Un endomorphisme non nul $u \in End_K(V)$ est dit **nilpotent** s'il existe un entier $p > 1$ tel que $u^p = 0$. Le plus petit entier naturel non nul r vérifiant $u^r = 0$ est appelé indice de nilpotence de u.

1. Montrer que si V est de dimension finie d et $u \in End_K(V)$ est un endomorphisme nilpotent, alors on a $u^d = 0$.
2. Donner des exemples d'endomorphismes nilpotents *(avec différents indices de nilpotence)* d'un K-espace vectoriel V de dimension 4.
3. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un K-espace vectoriel V de dimension $d > 0$. r étant l'indice de nilpotence de u, on considère $e(u)$ le sous-espace vectoriel de $End_K(V)$ engendré par $\{u^i, i \in \mathbb{N}\}$. Donner une base de $e(u)$.
4. On note Id_V l'endomorphisme identité de V. Montrer que si u est nilpotent, alors pour tout entier naturel s, $(Id_V - u)^s$ est un automorphisme de V.

5. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un K-espace vectoriel V de dimension $d > 0$. r étant l'indice de nilpotence de u, on considère $x \in V$ vérifiant $u^{r-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille

   $$\mathcal{F} = \{x, (Id_V - u)(x), \ldots, (Id_V - u)^s(x), \ldots, (Id_V - u)^{r-1}(x)\} \text{ est libre.}$$

   Donner un exemple pour $dim_K(V) = 4$.

Travail 2.15 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 1, 2)$ et $v_t = (1, t, 1)$ (où t est un paramètre réel).
Trouver tous les vecteurs $w \in \mathbb{R}^3$ permettant de compléter le système (u, v_t) en une base de $\mathbb{R}^3$.

Travail 2.16 Soient E un K-espace vectoriel de dimension 3 et V_1, V_2, V_3 trois plans vectoriels de E tels que $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0_E\}$.
Calculer les dimensions des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $V_1 + V_2,\ \ V_2 + V_3,\ \ V_3 + V_1$
2. $V_1 \cap V_2,\ \ V_2 \cap V_3,\ \ V_3 \cap V_1$
3. $V_1 + (V_2 \cap V_3),\ \ (V_1 \cap V_2) + V_3,\ \ (V_1 + V_2) \cap V_3,\ \ V_1 \cap (V_2 + V_3)$
4. $((V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap V_3)) \cap (V_3 \cap V_1)$
5. $(V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap V_3) + (V_3 \cap V_1)$.

3 Formes linéaires, dualité

Définition 3.1 (formes linéaires)
Soit E un K-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E, toute application linéaire $f : E \longrightarrow K$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, K)$ des formes linéaires sur E a une structure de K-espace vectoriel appelé espace vectoriel **dual** de E et est noté E^*. *Le dual de E^* est appelé* **bidual** *de E et est noté E^{**}*

Définition 3.2 (hyperplan)
Soit E un K-espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E tout supplémentaire d'une droite vectorielle de E.

$H \subset E$ est un hyperplan de E si et seulement si il existe $D \subset E$ droite vectorielle telle que $E = H \oplus D$.

Travail 3.3

1. Soient E un K-espace vectoriel et $f \in E^*$ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que $Ker(f)$ est un hyperplan de E.
2. Montrer que tout hyperplan H d'un K-espace vectoriel E est le noyau d'une forme linéaire $f : E \longrightarrow K$. *L'équation $f(x) = 0$ est alors appelée équation de l'hyperplan H.*

Travail 3.4 Soit E un K-espace vectoriel (de dimension quelconque). On considère l'application $e_v : E \longrightarrow E^{**}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad e_v(x) : \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & K \\ f & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Montrer que e_v est linéaire injective.

Théorème 3.5 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Alors les formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ définies par*

$$f_j(e_i) = \delta_i^j \quad \texttt{(symbole de Kronecker)}$$

forment une base de E^* appelée **base duale** *de la base $\mathcal{B}$.*

Travail 3.6 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans $\mathbb{R}$. On prend pour base de E le système $\mathcal{B} = \{1, X, \ldots, X^i, \ldots\}$ et on considère la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \ldots, f_j, \ldots\} \subset E^*$ définie par

$$f_j(X^i) = \delta_i^j.$$

Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Cette famille constitue-t-elle une base de E^* ?

Travail 3.7 Soit $E = \mathbb{R}[X]_n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré au plus n ($n \geq 1$). On considère $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ($a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$) et la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\} \subset E^*$ définie par

$$\forall P \in E,\ f_j(P) = P(a_j).$$

Vérifier que $\mathcal{F}$ est une base de E^* et déterminer la base $\mathcal{B}$ de E dont elle est la duale.
Qu'en est-il de la famille $\mathcal{G} = \{g_0, g_1, \ldots, g_n\} \subset E^*$ définie par

$$\forall P \in E,\ g_j(P) = P^{(j)}(a_0)?$$

Définition 3.8 (orthogonalité) *Soient E un K-espace vectoriel et E^* son dual.*

1. *On dit que $x \in E$ est* **orthogonal** *à $f \in E^*$ (*ou que $f \in E^*$ est **orthogonal** à $x \in E$*) si $f(x) = 0$.*
2. *On dit qu'une partie non vide $A \subset E$ est orthogonale à une partie non vide $B \subset E^*$ si pour tout $x \in E$ et tout $f \in B$ on a $f(x) = 0$.*

Propriétés 3.9 *Soient E un K-espace vectoriel et E^* son dual.*

1. *Soit A une partie non vide de E. Alors l'ensemble $A^\perp$ des formes linéaires orthogonales à A est un sous-espace vectoriel de E^*.*
2. *Soient A une partie non vide de E et $Vect(A)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par A. Alors on a $A^\perp = Vect(A)^\perp$.*
3. *Enoncés analogues pour une partie non vide B de E^*.*

Théorème 3.10 (dimension du sous-espace orthogonal)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

1. *Pour tout sous-espace vectoriel V de E, on a*

$$dim(V) + dim(V^\perp) = dim(E) = dim(E^*).$$

2. Pour tout sous-espace vectoriel W de E^*, on a

$$dim(W) + dim(W^\perp) = dim(E) = dim(E^*).$$

Preuve : Exercice.

Corollaire 3.11 (double orthogonal)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, E^* son dual.

1. *Pour tout sous-espace vectoriel V de E, on a $(V^\perp)^\perp = V$.*
2. *Pour tout sous-espace vectoriel W de E^*, on a $(W^\perp)^\perp = W$.*

Travail 3.12 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes :

1. $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$.
2. $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$.

Définition 3.13 (transposée d'une application linéaire)
Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Pour toute forme linéaire $\varphi \in F^*$, on a $\varphi \circ f \in E^*$. L'application ${}^tf : F^* \longrightarrow E^*$ définie par ${}^tf(\varphi) = \varphi \circ f$ est linéaire et est appelée **transposée** de f. *Pour tout $x \in E$, $\left[{}^tf(\varphi)\right](x) = \varphi\left(f(x)\right)$.*

Travail 3.14 E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré au plus 3. a_0, a_1, a_2 sont trois points distincts de $\mathbb{R}$. $u \in End_{\mathbb{R}}(E)$ est l'endomorphisme de E défini par

$$\forall P \in E, \quad u(P)(X) = P'(X - a_0) - P'(X - a_1) + P'(X - a_2).$$

$\varphi \in E^*$ est la forme linéaire définie par

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = \int_{a_1}^{a_2} P(t)dt.$$

1. Déterminer la forme linéaire ${}^tu(\varphi)$.
2. Soient $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ les quatre formes linéaires définies par : $\forall P \in E$,

$$\phi_1(P) = P(a_1); \;\; \phi_2(P) = P(a_2); \;\; \phi_3(P) = P'(a_1); \;\; \phi_4(P) = P'(a_2).$$

   $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base de E^* **(en faire la vérification)**. De quelle base de E est-elle la duale ?
   Ecrire la forme linéaire ${}^tu(\varphi)$ dans la base $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$.

4 Matrice d'une application linéaire

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe seront supposés de dimension finie. Le corps de base est toujours un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Définition 4.1 Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p. On suppose E et F munis respectivement des bases $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Tout $x \in E$, s'écrit de manière unique $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, $x_j \in K$. On a donc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j),$$

et l'application linéaire f est entièrement déterminée par la donnée des $f(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$.
Comme $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ est une base de F, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a de manière unique

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} v_i, \quad a_{ij} \in K.$$

L'application linéaire f est donc entièrement déterminée par la donnée des $p \times n$ scalaires $\{a_{ij}\}_{i=1,\ldots p, j=1,\ldots n}$.
On appelle matrice de l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice à coefficients dans K

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})_{i=1,\ldots p, j=1,\ldots n}, \text{ avec } \sum_{i=1}^{p} a_{ij} v_i = f(e_j).$$

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ du vecteur $f(e_j)$ se trouvent sur la j-ème colonne de la matrice ci-dessus.

Remarques 4.2 (cas particuliers)
Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p, munis respectivement des bases $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1. Si $n = 1$, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est une matrice unicolonne.
2. Si $p = 1$, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est une matrice uniligne.
3. Si $E = F$, on a $n = p$, f est un endomorphisme de E et $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est une matrice carrée $n \times n$. Si en plus $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est notée tout simplement $M_{\mathcal{B}}(f)$ et on parle de la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

Travail 4.3
On considère les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $E = \mathbb{R}[X]_3$ et $F = \mathbb{R}[X]_2$ munis respectivement des bases $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ et $\mathcal{C} = \{1, X - 1, X^2 - 1\}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(P) = P'$. Déterminer $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.
Quelle est la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de l'endomorphisme g de F défini par $g(P) = XP'$?

Travail 4.4 L'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ est supposé muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans cette base. Donner dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de chacune des transformations linéaires suivantes :

1. La symétrie (orthogonale) par rapport au plan des (x, y)
2. La symétrie (orthogonale) par rapport au plan d'équation $x = y$
3. La projection orthogonale sur le plan d'équation $y = z$
4. La symétrie (orthogonale) par rapport au plan d'équation
$$ax + by + cz = 0$$
pour $(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}\right)$.
5. La projection orthogonale sur le plan d'équation
$$ax + by + cz = 0$$
pour $(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}\right)$.

Travail 4.5 Le K-espace vectoriel $E = K[X]_n$ étant supposé muni de sa base canonique $\mathcal{C} = \{1, \ldots, X^i, \ldots, X^n\}$, on considère l'application $f : E \longrightarrow E$, donnée par $f(P) = q(P) + r(P)$, où $q(P)$ est le quotient de la division de P par X, et $r(P)$ est le reste de la division de P par X^n.
Montrer que f est un endomorphisme de E et donner la matrice M de f dans la base $\mathcal{C}$. Calculer le rang de M.

Travail 4.6 Soit $M_{pn}(K)$ le K-espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes, à coefficients dans K. Quelle est la dimension de $M_{pn}(K)$? Donner une base de $M_{pn}(K)$. Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p. Montrer que $\mathcal{L}_K(E,F)$ est isomorphe à $M_{pn}(K)$.

Travail 4.7 (changement de base)
Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On pose
$P = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$ (*la matrice faisant passer de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*),
$Q = Mat_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(Id_F)$ (*la matrice faisant passer de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{C}'$*).
Soit $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$ tel que $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = M$. Donner $M' = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ en fonction de M, P et Q.

Travail 4.8 Pour un entier naturel non nul q, $GL_q(K)$ désigne le groupe des matrices carrées $q \times q$ inversibles.

1. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $M_{pn}(K)$ par
$$M\mathcal{R}N \iff (\exists P \in GL_p(K), \exists Q \in GL_n(K);\ N = PMQ)$$
est une relation d'équivalence sur $M_{pn}(K)$.
Deux matrices M et $N \in M_{pn}(K)$ sont dites équivalentes si
$(\exists P \in GL_p(K), \exists Q \in GL_n(K)$ *telles que* $N = PMQ)$
2. Montrer que deux matrices M et $N \in M_{pn}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
3. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $M_n(K)$ par
$$M\mathcal{R}N \text{ si et seulement si } \big(\exists P \in GL_n(K) \text{ telle que } N = P^{-1}MP\big)$$
est une relation d'équivalence sur $M_n(K)$.
Deux matrices M et $N \in M_n(K)$ sont dites semblables si
$\big(\exists P \in GL_n(K)$ *telle que* $N = P^{-1}MP\big)$

Travail 4.9 Soit $M \in M_{pn}(K)$. Montrer que l'on a $rg(M) \leq 1$ si et seulement si
$$\exists A \in M_{p1}(K), B \in M_{1n}(K) :\ M = AB.$$

Travail 4.10 (trace d'une matrice carrée)
Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans K. On appelle **trace** de M notée $Tr(M)$ le scalaire
$$Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ (somme des éléments diagonaux de la matrice } M).$$

1. Montrer que l'application $Tr : M_n(K) \longrightarrow K$ qui à une matrice carrée $n \times n$ associe sa trace est une forme linéaire.
2. Pour M, $N \in M_n(K)$, montrer que

$$Tr(MN) = Tr(NM)$$

3. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

Travail 4.11 E est le K-espace vectoriel $M_n(K)$. Etudier l'application $\tau_r : E \longrightarrow E^*$ définie par

$$\forall A \in E, \forall X \in E,\ \tau_r(A)(X) = Tr(AX).$$

Travail 4.12 Montrer que toute matrice $M \in M_n(K)$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls.

5 Applications multilinéaires - Déterminants

Définition 5.1 (Applications multilinéaires) Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des K-espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$ est dite *n-linéaire* si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
quel que soit $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \ldots \times E_n$, l'*application partielle* $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \ldots, x_n) : E_i \longrightarrow F$ *est linéaire*. Lorsque $F = K$ on parle de *forme n-linéaire*. Lorsque $n = 2$ (resp. $n = 3$) on parle d'*application bilinéaire* (resp. *trilinéaire*).

Exemple 5.2 (Forme bilinéaire canonique) Soit E un K-espace vectoriel, E^* son dual. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E^* & \longrightarrow & K \\ & (x, f) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bilinéaire.

Théorème 5.3 *L'ensemble des applications n-linéaires de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F est un K-espace vectoriel noté $\mathcal{L}_n(E_1 \times \ldots \times E_n, F)$.*

Remarque 5.4
Ne pas confondre $\mathcal{L}_n(E_1 \times \ldots \times E_n, F)$ et $\mathcal{L}(E_1 \times \ldots \times E_n, F)$ (*l'espace des applications linéaires de l'espace vectoriel produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F*).

Travail 5.5 Soient E_1, E_2, E_3 et F des K-espaces vectoriels. Pour $f \in \mathcal{L}_3(E_1 \times E_2 \times E_3, F)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$, $\lambda \in K$, calculer $f(x + y)$ et $f(\lambda x)$.

Travail 5.6 Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $m > 0$. Calculer les dimensions des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants :

1. $\mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, F)$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, F)$
2. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, F)$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, F)$
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, F)$ et $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, F)$

Travail 5.7 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie d.

1. Rappeler la définition d'une forme n-linéaire symétrique sur E. Après avoir vérifier que l'ensemble des formes n-linéaires symétriques sur E est un K-espace vectoriel, calculer la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E.
2. Mêmes questions que ci-dessus pour ce qui concerne les formes n-linéaires antisymétriques sur E.

Définition 5.8 (Forme n-linéaire alternée)
Soient E et F des K-espaces vectoriels. Une application n-linéaire $f : E^n \longrightarrow F$ est dite *alternée* si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ on a :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\},\ (x_i = x_j \text{ et } i \neq j) \Longrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Théorème 5.9 *Toute application n-linéaire alternée définie sur E^n est antisymétrique. Réciproquement si le corps de base K n'est pas de caractéristique 2, toute application n-linéaire antisymétrique est alternée.*

Travail 5.10 Prouver le théorème 5.9 ci-dessus.

Théorème 5.11 *E étant un K-espace vectoriel de dimension finie n, le K-espace vectoriel des formes n-linéaires alternées définies sur E^n est de dimension 1.*

Travail 5.12 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et f une forme n-linéaire alternée non nulle définie sur E^n. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, montrer que la famille $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset E$ est liée si et seulement si $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Théorème-Définition 5.13 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E étant donnée, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée f définie sur E^n, telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $f(x_1, \dots, x_n)$ est appelé*

déterminant *de $(x_1, \dots, x_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et se note*

$$det_{(e_i)}(x_1, \dots, x_n)$$

où tout simplement $det(x_1, \dots, x_n)$ si le contexte est clair.

Travail 5.14 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \times det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).$$

En particulier si $(x_1, \dots, x_n) = (e'_1, \dots, e'_n) = \mathcal{B}'$, on a

$$1 = det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$$

Théorème 5.15 (Déterminant d'un endomorphisme)
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. Alors il existe un unique scalaire $\lambda \in K$ tel que pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E on a

$$det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \lambda.$$

Ce scalaire λ s'appelle **déterminant de** *u et est noté $det(u)$.*

Travail 5.16 Donner la preuve du théorème 5.15 ci-dessus.

Travail 5.17 Soient un K-espace vectoriel de dimension finie n, u et v deux endomorphismes de E. Prouver les énoncés suivants :

1. $(u \in Aut(E)) \Longleftrightarrow det(u) \neq 0$
2. $det(u \circ v) = (det(u)) \times (det(v))$
3. $\forall u \in Aut(E), det(u^{-1}) = (det(u))^{-1}$

Travail 5.18 Le plan affine réel étant identifié à $\mathbb{C}$, on se donne n points $A_1, \ldots, A_n$ d'affixes respectifs $a_i (1 \leq i \leq n)$.
Etudier la possibilité de construire un polygone du plan affine, dont les A_i sont les milieux des côtés.

Travail 5.19 Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système linéaire suivant où $t \in \mathbb{C}$ est un paramètre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} tx + y + t^2 z & = & 0 \\ x + \bar{t}y + tz & = & 0 \\ tx + \bar{t}^2 y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Travail 5.20 a, b et c étant des paramètres réels soumis à la condition $a + 2b + c = 0$, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz & = & 1 \\ cx + ay + bz & = & 1 \\ bx + cy + az & = & 1 \end{array} \right.$$

Travail 5.21 Pour un entier n $(n \geq 2)$ et $A \in M_n(K)$, donner le rang de $com(A)$ (*la comatrice de A*) en fonction de celui de A.

Travail 5.22 θ est un nombre réel fixé. n est un entier naturel $(n \geq 2)$. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{ij} = cos(\theta + i + j).$$

Même question pour la matrice $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$b_{ij} = sin(\theta + i + j).$$

6 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

6.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 6.1.1 (Structure de K-algèbre) Soient K un corps commutatif, E un ensemble muni d'une addition (notée $+$), d'une multiplication interne (notée $*$) et d'une multiplication externe (notée $\times$, à domaine K). On dit que E a une structure de K-algèbre ($(E, +, *, \times)$ *est une K-algèbre)* si :

1. $(E, +, \times)$ est un K-espace vectoriel
2. $(E, +, *)$ est un anneau
3. Pour tout $\lambda \in K$ et tout couple (x, y) d'éléments de E on a

$$\lambda \times (x * y) = (\lambda \times x) * y = x * (\lambda \times y).$$

On dit que E a une structure de K-algèbre commutative si l'anneau $(E, +, *)$ est commutatif pour la multiplication interne.
On dit que E a une structure de K-algèbre unitaire si l'anneau $(E, +, *)$ admet un élément neutre pour la multiplication interne.

Soit E un K-espace vectoriel. $End_K(E)$ est le K-espace vectoriel des applications linéaires $u : E \longrightarrow E$. $\underline{(End_K(E), +, \times, \circ)}$ **<u>est une K-algèbre</u>**.

Propriété 6.1.2 *Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, alors $End_K(E)$ est isomorphe à $M_n(K)$ et est donc de dimension n^2. La donnée d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E détermine un isomorphisme $\phi_{\mathcal{B}}$: $End_K(E) \longrightarrow M_n(K)$, définie par $\phi_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. $\phi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de K-algèbres.*

Définition 6.1.3
Soient E un K-espace vectoriel (de dimension quelconque), V un sous-espace vectoriel de E et $u \in End_K(E)$. On dit que V est stable par u si $u(V) \subset V$ `(i.e. pour tout` $x \in V$`, on a` $u(x) \in V$`)`. Si V est un sous-espace de E stable par u, alors la restriction $u_{|V}$ de u à V est un endomorphisme de V.

Travail 6.1.4 Soit E un K-espace vectoriel de dimension 4 ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note (x_1, x_2, x_3, x_4) les coordonnées d'un vecteur dans cette base. Soit $u_t \in End_K(E)$ ($t \in K$) définie par

$$u(e_i) = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 - te_i.$$

Pour quelles valeurs du paramètre a l'hyperplan vectoriel H_a d'équation $ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est-il stable par u_t ?
Pour ces valeurs de a, décrire matriciellement $u_{t|H_a}$.

Propriété 6.1.5 *Soient $u, v \in End_K(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$* (on dit que u et v commutent)*, alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.*

Définition 6.1.6 (Polynôme d'un endomorphisme)
Soient E un K-espace vectoriel, $u \in End_K(E)$. A tout polynôme $P \in K[X]$ ($P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$) on associe l'endomorphisme $P(u) = \sum_{i=0}^{d} a_i u^i \in End_K(E)$ où $u^0 = Id_E,\ u^i = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (i fois).

Propriété 6.1.7
Pour $u \in End_K(E)$ fixé, l'application $\varphi_u : K[X] \longrightarrow End_K(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme d'algèbres. $Im(\varphi_u)$ est une sous-algèbre commutative de $End_K(E)$, $ker(\varphi_u)$ est un idéal de $K[X]$.

Théorème 6.1.8 (Théorème de décomposition des noyaux)
Soient $P,\ Q \in K[X]$, $u \in End_K(E)$. On suppose que $(P, Q) = 1$. Alors $Ker(PQ(u)) = Ker(QP(u)) = Ker(P(u)) \oplus Ker(Q(u))$.
Plus généralement, si $P = P_1 \times \cdots \times P_s$ est un élément de $K[X]$ tel que pour $i \neq j$ on ait $(P_i, P_j) = 1$, alors $Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{s} Ker(P_i(u))$.

Travail 6.1.9 Donner un schéma de preuve du théorème 6.1.8 ci-dessus.

6.2 Valeurs propres d'un endomorphisme

Définition 6.2.1 Soient E un K-espace vectoriel, $u \in End_K(E)$. On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si $Ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$. Autrement dit,

$\lambda \in K$ **est valeur propre de** u **si et seulement si il existe un**

vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre pour λ.

Le sous-espcace $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$ est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Propriété 6.2.2 *Si $\lambda \in K$ est une valeur propre de u, le sous-espace propre $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$ associé à λ est stable par u et la restriction de u à $E_\lambda(u)$ est une homothétie de rapport λ.*

Définition 6.2.3 Soient E un K-espace vectoriel, $u \in End_K(E)$. On appelle spectre de u, noté $spec(u)$ (ou $sp(u)$), l'ensemble des valeurs propres de u.

Travail 6.2.4 Soient $E = K[X]$, $u \in End_K(E)$ définie par $u(P) = P+XP'$. Quelles sont les valeurs propres de u ?

Travail 6.2.5 Pour $K = \mathbb{R}$ et pour $K = \mathbb{C}$, donner un exemple de K-espace vectoriel E et $u \in End_K(E)$ tels que $spec(u) = \emptyset$.

Travail 6.2.6 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, $u, v \in End_K(E)$. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont mêmes valeurs propres.

Travail 6.2.7 Peut-on se passer de l'hypothèse "E est de dimension finie" dans l'exercice 6.2.6 ci-dessus ?

Travail 6.2.8 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n,
$u \in End_K(E)$, $P \in K[X]$.
Montrer que si $\lambda \in spec(u)$, alors on a $P(\lambda) \in spec(P(u))$.

6.3 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E. On supposera au besoin E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de sorte que u est identifié à sa matrice $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 6.3.1 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in End_K(E)$. Alors $\lambda \in K$ est une valeur propre de u si et seulement si*

$$det(u - \lambda Id_E) = 0.$$

Si on note I_n la matrice identité d'ordre n, on a $\lambda \in K$ est une valeur propre de u (ou de manière équivalente de M) *si et seulement si*

$$det(M - \lambda I_n) = 0.$$

Définition 6.3.2 E étant K-espace vectoriel de dimension finie n, pour $u \in End_K(E)$ on pose

$$P_u(X) = det(u - XId_E) \ (= det(M - XI_n)).$$

On montre que $P_u(X)$ est un polynôme de degré n.
$P_u(X)$ est appelé le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u
`(ou de manière équivalente, le polynôme caractéristique`
`de la matrice` $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$`).`

Propriété 6.3.3 *Le polynôme caractéristique est invariant par changement de bases.*

`Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.`

Propriété 6.3.4 *Soit $M \in M_n(K)$ une matrice carrée d'ordre n. On a*

$$det(M - XI_n) = (-1)^n X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$$
$$\text{où } a_1 = (-1)^{n-1}Tr(M) \text{ et } a_n = det(M).$$

Rappels 6.3.5

1. *Si un polynôme non nul $P \in K[X]$ admet λ pour racine de multiplicité α, alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X-\lambda)^\alpha Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.*
2. *Si un polynôme non nul $P \in K[X]$ admet $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ pour racines de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, alors il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \times \cdots \times (X-\lambda_s)^{\alpha_s} Q$ et $Q(\lambda_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq s$.*
   On a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s \leq deg(P)$.
   Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = deg(P)$ alors Q est une constante non nulle et $P = k(X-\lambda_1)^{\alpha_1} \times \cdots \times (X-\lambda_s)^{\alpha_s}$ ($k \in K$). On dit alors que le polynôme P est scindé sur K.
3. *Un corps K sur lequel tout polynôme $P \in K[X]$ est scindé est dit algébriquement clos.*
4. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Le corps } \mathbb{C} \text{ des nombres complexes est algébriquement clos.} \\ \text{Le corps } \mathbb{R} \text{ des nombres réels n'est pas algébriquement clos.} \end{array} \right.$

Travail 6.3.6
Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2-t \\ 1 & -1+t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ où t est un paramètre réel.
Calculer le polynôme caractéristique $P_M(X)$ de M et dire pour quelles valeurs du paramètre $P_M(X)$ a une racine double.

Propriété 6.3.7 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Si λ est une racine de multiplicité α du polynôme caractéristique $P_u(X)$ de u, alors on a*

$$1 \leq dim(Ker(u - \lambda Id_E)) \leq \alpha.$$

Travail 6.3.8 Donner une idée de la preuve de la propriété 6.3.7 ci-dessus.

Définition 6.3.9 On dit qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

Définition 6.3.10 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est diagonale.

Théorème 6.3.11 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n ; et $u \in End_K(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in K[X]$ polynôme non nul à racines simples tel que $P(u) = 0$.*

Travail 6.3.12 Donner un schéma de preuve pour le théorème 6.3.11 ci-dessus.

Théorème 6.3.13 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End_K(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes

i) u est diagonalisable

ii) Le polynôme caractéristique $P_u(X)$ de u est scindé sur K et pour toute racine λ de multiplicité α de $P_u(X)$ on a

$$dim(Ker(u - \lambda Id_E)) = \alpha.$$

Corollaire 6.3.14 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End_K(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors u est diagonalisable et chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i} = Ker(u - \lambda_i Id_E)$ est de dimension 1.*

Travail 6.3.15
Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres complexes a, b, c pour que la matrice symétrique

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ ne soit pas diagonalisable.}$$

Travail 6.3.16 Soit E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On définit

$$\begin{array}{cccc} \varphi_u : & End_K(E) & \longrightarrow & End_K(E) \\ & f & \longmapsto & u \circ f \end{array}$$

1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de $End_K(E)$.
2. Montrer que φ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Travail 6.3.17 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n ; $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$. On considère l'endomorphisme u de E défini par

$$u(e_i) = e_{i+1} \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1;\ u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} -a_{i-1}e_i.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de u pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
2. Trouver une matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ n'ayant aucune valeur propre réelle.
3. Calculer le polynôme caractéristique de u pour n quelconque.
4. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Soit f un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{C} = \{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

Définition 6.3.18 On dit qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est trigonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que $P^{-1}MP$ est une matrice triangulaire supérieure.

Définition 6.3.19 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème 6.3.20 (Caractérisation des endomorphismes trigonalisables)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End_K(E)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes

i) u est trigonalisable

ii) Le polynôme caractéristique $P_u(X)$ de u est scindé sur K.

Travail 6.3.21 Indiquer brièvement un schéma de preuve du théorème 6.3.20 ci-dessus.

Propriété 6.3.22
Le corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E est trigonalisable.

Théorème 6.3.23 (Théorème de Cayley-Hamilton)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E. Alors le polynôme caractéristique de u annule u :

$$P_u(u) = 0.$$

Si u a pour matrice M relativement à une base $\mathcal{B}$ de E, le théorème de Cayley-Hamilton s'énonce

$$P_M(M) = 0.$$

Définition 6.3.24 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in End_K(E)$. Si λ est une valeur propre de multiplicité α de u, on appelle *sous-espace caractéristique associé à la valeur propre* λ, le sous-espace

$$N_\lambda = Ker(u - \lambda Id_E)^\alpha.$$

Propriétés 6.3.25

1. *Si λ est une valeur propre de multiplicité α de u, alors le sous-espace caractéristique $N_\lambda = Ker(u - \lambda Id_E)^\alpha$ est de dimension α.*
2. *Si le polynôme caractéristique de $u \in End_K(E)$ est scindé sur K, alors E est somme directe des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de u.*

Théorème 6.3.26 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in End_K(E)$ tel que le polynôme caractéristique de u soit scindé sur K :*

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \times \cdots \times (\lambda_s - X)^{\alpha_s},\ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j\ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = n).$$

Alors pour tout i ($1 \le i \le s$) il existe une base

$$\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,\alpha_i}) \text{ de } N_{\lambda_i} = Ker(u - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$$

telle que

$$\mathcal{B} = (e_{1,1}, \ldots, e_{1,\alpha_1}, \ldots, e_{s,1}, \ldots, e_{s,\alpha_s}) \texttt{ (la réunion des bases } \mathcal{B}_i\texttt{)}$$

est une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Travail 6.3.27 En utilisant le théorème 6.3.26 ci-dessus, trigonaliser les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 6.3.28 *Soit $M \in M_n(K)$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur K :*

$$P_M(X) = (\lambda_1 - X)^{\alpha_1} \times \cdots \times (\lambda_s - X)^{\alpha_s}, \ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j \ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = n).$$

Alors il existe une matrice inversible $P \in M_n(K)$ telle que

$$P^{-1}MP = M' = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

où $A_i \in M_{\alpha_i}(K)$ est une matrice triangulaire supérieure de la forme

$$A_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + B_i.$$

La matrice M' ci-dessus est dite diagonale par blocs.

Corollaire 6.3.29 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in End_K(E)$ tel que le polynôme caractéristique de u soit scindé sur K. Alors u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme*

$$u = d + n$$

où d est un endomorphisme diagonalisable,
n un endomorphisme nilpotent

et $dn = nd$ (n et d commutent).