Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2009/2010 - semestre 4 -

Partiel du 29 mars 2010 (durée: 1h30) - Barème (à titre indicatif): 6, 8, 10

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. A_1, A_2, A_3 sont trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On veut:

($*$) ***Trouver dans le plan*** $\mathcal{P}$***, un triangle*** $M_1M_2M_3$ ***tel que les points***
A_1, A_2, **et** A_3 ***soient respectivement les milieux des segments*** $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ ***et*** $[M_3M_1]$.

1. Supposons que $M_1M_2M_3$ est un triangle répondant à la question ($*$). Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$?
2. Soient $\mathcal{D}_1$ la parallèle à (A_2A_3) par A_1, $\mathcal{D}_2$ la parallèle à (A_3A_1) par A_2, $\mathcal{D}_3$ la parallèle à (A_1A_2) par A_3. $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes en A, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en B, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ sécantes en C. Faire un dessin de la configuration et montrer que le triangle ABC répond à la question ($*$).
3. Combien y a-t-il de triangles $M_1M_2M_3$ répondant à la question ($*$)?

Exercice 2. Soit ABC un triangle dans le plan usuel $\mathcal{P}$. On note I le milieu du segment $[AB]$, h l'homothétie de centre A et de rapport 2, $t_{\overrightarrow{BC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Soit f la transformation affine définie par $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ h$.

1. Donner l'image (par f) d'un point de votre choix.
2. Quelle est la partie linéaire $\vec{f}$ de f?
3. Quelle est l'image de la droite (IC) par f?
4. Soit $\mathcal{D}$ la parallèle à (BC) par A. Quelle est l'image de la droite $\mathcal{D}$ par f?
5. f admet-elle un point fixe? Faire un dessin. Conclusion?
6. Quelle est la droite Δ dont l'image par f est la droite (AC)?

Exercice 3. Soit X un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (A_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point $M \in X$. Soient A, B, C, D et E_m les points de X de coordonnées respectives $(1,1,1)$, $(2,2,1)$, $(1,2,-1)$, $(1,1,0)$ et $(1,0,m)$ où m est un paramètre réel. On note $\mathcal{D}_m$ la droite (DE_m).

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. Dans toute la suite on notera $\mathcal{P}$ le plan affine engendré par A, B et C.
2. Munir le plan $\mathcal{P}$ (engendré par A, B et C) d'un repère orthonormé $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = (O, e_1, e_2)$ et pour un point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ de X, calculer les coordonnées (x_1, x_2) dans le repère $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ du projeté orthogonal M' de M sur le plan $\mathcal{P}$.
3. Trouver dans X une droite dont le projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$ n'est pas une droite.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de m a-t-on $\overrightarrow{\mathcal{D}_m} \subset \vec{\mathcal{P}}$?
5. Montrer que l'image de la droite $\mathcal{D}_m$ par la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ est une droite Δ_m de $\mathcal{P}$. Donner dans le repère $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$, une équation cartésienne de cette droite Δ_m.
