Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2009/2010 - semestre 4 -

Partiel du 25 mai 2010 (durée: 2h) - Barème (à titre indicatif): 6, 10, 6

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. Le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations respectives $x-2y+1=0$ et $3x-y-7=0$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.
2. Prendre $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs unitaires qui engendrent respectivement $\vec{\mathcal{D}_1}$ et $\vec{\mathcal{D}_2}$ puis calculer:
   a) le produit scalaire $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$
   b) le déterminant $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ (déterminant pris relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$)
   c) une mesure de l'angle orienté $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$
3. On note $s_{\mathcal{D}_i}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}_i$. Quelle est la nature de la transformation $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$?
4. Faire un dessin, y tracer les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et placer le point O', image de l'origine par la transformation $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.

Exercice 2. Dans cet exercice, le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, t est un paramètre réel. On considère l'application affine (dépendant du paramètre t) $f_t: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui à un point M de coordonnées (x, y) associe le point $M' = f_t(M)$ de coordonnées

$$(x', y') = \left(\frac{3x+4y}{5} + 2t - 1, \frac{4x-3y}{5} - t - 3\right).$$

1. Quelles sont les coordonnées du point $O' = f_t(O)$?
2. Quelle est la matrice de la partie linéaire $\vec{f_t}$ de f_t dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$?
3. Montrer que f_t est une isométrie. Que peut-on dire de la matrice de la question précédente? Décrire la transformation linéaire $\vec{f_t}$.
4. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre t, f_t admet-elle au moins un point fixe?
5. Décrire l'ensemble des points fixes de f_t lorsqu'il est non vide.
6. Soit Δ la droite d'équation $x - 2y = 0$. Montrer que si $\mathcal{D}$ est une droite parallèle à Δ, alors $f_t(\mathcal{D})$ est une droite parallèle à Δ.
7. Maintenant, on suppose que $t = 0$ et on se demande s'il existe une droite $\mathcal{D}_0$ parallèle à Δ (voir question précédente) et telle que $f_0(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}_0$.
   a) Montrer que les énoncés (E_1) et (E_2) ci-dessous sont équivalents:
   (E_1): Il existe une droite $\mathcal{D}_0$ parallèle à Δ telle que $f_0(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}_0$.
   (E_2): Il existe un point $M_0 \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{M_0 f_0(M_0)} \in \vec{\Delta}$.
   b) Existe-t-il un point $M_0 \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{M_0 f_0(M_0)} \in \vec{\Delta}$? Justifiez votre réponse.
   c) Existe-t-il une droite $\mathcal{D}_0$ parallèle à Δ telle que $f_0(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}_0$? Justifiez votre réponse.
   d) Quelle est la nature de l'isométrie f_0? Illustrez votre réponse par un dessin.
8. Tous les résultats de la question 7. ci-dessus restent-ils valides pour des valeurs non nulles du paramètre réel t? Si oui, lesquelles? Justifiez votre réponse.

Tourner la page S.V.P.

Exercice 3. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points du plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$. Le but de cet exercice est de résoudre le problème suivant:

$(\ast)$ ***Déterminer dans le plan*** $\mathcal{P}$***, tous les quadrilatères*** $M_1M_2M_3M_4$ ***tels que les points***

A_1, A_2, A_3 **et** A_4 ***soient respectivement les milieux des segments*** $[M_1M_2]$***,*** $[M_2M_3]$***,*** $[M_3M_4]$ ***et*** $[M_4M_1]$***.***

1. Faire une figure.

2. Montrer que pour qu'un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ soit solution de $(\ast)$, il faut que deux sommets adjacents quelconques de ce quadrilatère, par exemple M_1 et M_2 se déduisent l'un de l'autre par une transformation du plan. (On demande de décrire une transformation s'exprimant simplement en fonction des points A_1, A_2, A_3 et A_4).

3. Pour un point donné $M \in \mathcal{P}$, on note s_M la symétrie centrale de centre M.
   Exprimer de manière simple, chacune des transformations $s_{A_2} \circ s_{A_1}$ et $s_{A_4} \circ s_{A_3} \circ s_{A_2} \circ s_{A_1}$.

4. Supposons qu'il existe un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$, solution de $(\ast)$.

   a) Montrer que l'on a $s_{A_4} \circ s_{A_3} \circ s_{A_2} \circ s_{A_1}(M_1) = M_1$. Que peut-on en déduire sur la transformation $s_{A_4} \circ s_{A_3} \circ s_{A_2} \circ s_{A_1}$?

   b) Montrer que $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.

5. Expliquer pourquoi, si $A_1A_2A_3A_4$ n'est pas un parallélogramme, il est impossible de trouver un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ qui soit solution du problème $(\ast)$.

6. On suppose à présent que $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.
   Expliquer pourquoi, à partir d'un point M_1 quelconque, on peut construire des points M_2, M_3 et M_4 de sorte que le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ réponde au problème $(\ast)$.
