Université de Nice Sophia Antipolis Licence L2 - Géométrie

Année 2010/2011 - semestre 4 -

Corrigé succinct de l'interrogation écrite du 21 février 2011

Exercice 1. Dans un plan affine réel $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère quatre points A, B, C_t et D de coordonnées respectives $(2, -3)$, $(3, -2)$, $(5, t)$ et $(1, 2)$, où t est un paramètre réel.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de t les droites (AB) et (DC_t) sont-elles parallèles?

   Solution: On a $(AB)//(DC_t)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC_t}$ sont liés, c'est-à-dire $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC_t}) = 0$.
   Nous avons $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{DC_t} = 4\vec{i} + (t-2)\vec{j}$, d'où $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC_t}) = t - 6$.
   On en déduit que les droites (AB) et (DC_t) sont-elles parallèles si et seulement si $t = 6$.

2. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

   Solution: Un point M de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ appartient à la droite (AB) si et seulement si $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$. Un simple calcul de ce déterminant nous donne l'équation suivante pour (AB): $x - y - 5 = 0$.

3. Montrer que les points A, B et C_t sont alignés si et seulement si $t = 0$.

   Solution: A, B et C_t sont alignés si et seulement si les coordonnées $(5, t)$ de C_t vérifient l'équation de (AB) trouvée dans la question précédente.
   On vérifie facilement que cela équivaut à $t = 0$.

4. On suppose $t \neq 0$.
   Quelles sont les coordonnées du point D dans le repère cartésien $\mathcal{R}'_t = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_t})$?

   Solution: Si $t \neq 0$, alors les points A, B et C_t ne sont pas alignés et ainsi $\mathcal{R}'_t$ est bien un repère cartésien de $\mathcal{P}$. Notons (x', y') les coordonnées de D dans le repère $\mathcal{R}'_t$. Par définition, on a $\overrightarrow{AD} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC_t}$. Nous avons $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 5\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AC_t} = 3\vec{i} + (t+3)\vec{j}$.
   L'égalité $\overrightarrow{AD} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC_t}$ correspond alors au système suivant: $\begin{cases} x' + 3y' = -1 \\ x' + (t+3)y' = 5 \end{cases}$.
   En résolvant ce sytème, on trouve que $x' = -1 - \frac{18}{t}$, $y' = \frac{6}{t}$.
   Conclusion: dans le repère $\mathcal{R}'_t$ le point D a donc pour pour coordonnées $(-1 - \frac{18}{t}, \frac{6}{t})$.

Exercice 2.
X est un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X dans le repère $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

1. Soient M_0 le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant M_0 et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Expliquer pourquoi la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

   Solution: On vérifie facilement que M_0 appartient au plan $\mathcal{P}$. Comme $M_0 \in \mathcal{P}$, on aura $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{v} \in \vec{\mathcal{D}}$. Nous savons qu'un vecteur de coordonnées (a, b, c) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ appartient à $\vec{\mathcal{D}}$ si et seulement si $a - 2b + 3c = 0$. On constate facilement que $\vec{v} \in \vec{\mathcal{D}}$.
   Remarque: comme $M_0 \in \mathcal{P}$, si M'_0 est le translaté de M_0 par le vecteur $\vec{v}$, il suffit de vérifier que $M'_0 \in \mathcal{P}$. Par définition de la translation de vecteur $\vec{v}$, on trouve que M'_0 a pour coordonnées $(2, 3, 2)$ et ce dernières vérifient bien l'équation de $\mathcal{P}$.

2. Trouver sur le plan $\mathcal{P}$, quatre points non alignés A, B, C et D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme (rappel: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

   Solution: il suffit de trouver deux points distincts A, B sur $\mathcal{P}$, un vecteur $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de poser $C = t_{\vec{w}}(B)$, $D = t_{\vec{w}}(A)$, où $t_{\vec{w}}$ est la translation de vecteur $\vec{w}$. On peut par exemple prendre $A = M_0$, B le point de coordonnées $(2, 0, 0)$ et $\vec{w} = \vec{v}$ pour avoir C de coordonnées $(3, 2, 1)$ et D de coordonnées $(2, 3, 2)$.
