Université de Nice Sophia Antipolis | Licence L2 - Géométrie

Année 2010/2011 - semestre 4 -

Corrigé succinct de l'interrogation écrite du 18 avril 2011

Exercice 1. Le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour a et b deux nombres réels tels que $ab \neq 0$, on considère les points A, B dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(a,\ 0)$ et $(0,\ b)$. On note $\mathcal{D}_{ab}$ la droite définie par ces deux points.

1. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_{ab}$.

   Solution: L'hypothèse $ab \neq 0$ nous dit que les points A et B sont distincts. Un point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite $\mathcal{D}_{ab}$ si et seulement si $\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$. On en déduit facilement que $\mathcal{D}_{ab}$ admet pour équation: $bx + ay - ab = 0$.

2. Soit O' le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}_{ab}$. Donner les coordonnées de O' dans le repère $\mathcal{R}$.

   Solution: Un système équations paramétriques de la normale à $\mathcal{D}_{ab}$ par O est donné par $\begin{cases} x = bt \\ y = at \end{cases}$. On en déduit que O' a pour coordonnées $\dfrac{ab}{a^2 + b^2}(b, a)$.

3. Soit O'' le symétrique orthogonal de O par rapport à $\mathcal{D}_{ab}$. Quelles sont les coordonnées de O'' dans le repère $\mathcal{R}$?

   Solution: En utilisant le résultat de la question précédente et sachant que O' est le milieu de $[OO'']$, on trouve que O'' a pour coordonnées $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}(b, a)$.

4. Calculer en fonction de a et b, la distance de O à la droite $\mathcal{D}_{ab}$.

   Solution: On a $d(O, \mathcal{D}_{ab}) = \|\overrightarrow{OO'}\| = \dfrac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

5. On suppose que $a = \frac{5}{3}$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de b le point O est-il à la distance 1 de la droite $\mathcal{D}_{ab}$?

   Solution: On a $d(O, \mathcal{D}_{ab}) = 1$ si et seulement si $\dfrac{5}{3} \times \dfrac{|b|}{\sqrt{\frac{25}{9} + b^2}} = 1$. Ce qui donne apès élevation au carré, $5^2 b^2 = 5^2 + 9b^2$, ou encore $b = \pm \dfrac{5}{4}$.

Exercice 2. Dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$, on considère quatre points A_1, A_2, A_3 et A_4. On note s_{A_i} la symétrie centrale de centre A_i et on pose $f = s_{A_4} \circ s_{A_3} \circ s_{A_2} \circ s_{A_1}$.

1. Expliquer pourquoi f est une translation.

   Solution: On a $\vec{s_{A_i}} = -\operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$, donc $\vec{f} = \operatorname{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$. Ce qui signifie que f est une translation (voir le devoir maison n° 2).

2. Montrer que $f = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$ si et seulement si $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.

   Solution: $s_{A_2} \circ s_{A_1}$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{A_1A_2}$, de même $s_{A_4} \circ s_{A_3}$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{A_3A_4}$. Nous avons donc $f = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$ si et seulement si $2(\overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{A_2A_1}) = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}$, ce qui signifie bien que $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme.

3. On suppose que $f = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$. Que peut-on dire des transformations g et h définies par $g = s_{A_1} \circ s_{A_2} \circ s_{A_3} \circ s_{A_4}$, $\quad h = s_{A_3} \circ s_{A_1} \circ s_{A_4} \circ s_{A_2}$? Justifiez votre réponse.

   Solution: D'après la question précédente, $f = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$ signifie que $A_1A_2A_3A_4$ est un parallélogramme. On en déduit que $g = \operatorname{Id}_{\mathcal{P}}$ et h est la translation de vecteur $4\,\overrightarrow{A_2A_3}$.
