Université de Nice Sophia Antipolis Licence L2 - Géométrie

Année 2010/2011 - semestre 4 -

Corrigé succinct du partiel du 28 mars 2011

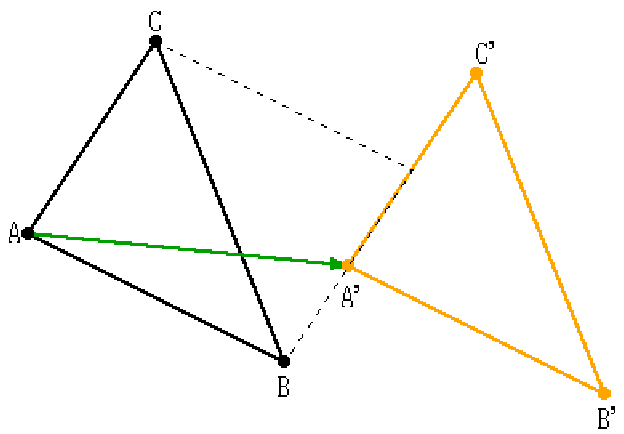
Exercice 1. On considère dans un espace affine réel de dimension au moins 2, trois points non alignés A, B et C. A tout point M de X on associe le point M', barycentre des points A, B, C, M affectés respectivement des coefficients -3, 2, 1 et 2. On définit ainsi une application $f\colon X \longrightarrow X$.

1. Montrer que f est une translation (préciser le vecteur définissant la translation).

   Solution: Par définition, nous avons $-3\,\overrightarrow{M'A} + 2\,\overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{M'C} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.
   En utilisant la relation de Chasles on obtient: $-3\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$, c'est-à-dire $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$. On déduit que pour tout $M \in X$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. f est donc une translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2. Faire un dessin et y placer les points $A, B, C, f(A), f(B)$ et $f(C)$.

   Solution: On construit un triangle ABC puis on le translate du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.



Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On muni $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On note (x, y) les coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$ dans ce repère.

Pour α, β et γ trois nombres réels pris dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on considère les points A', B' et C' dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(\alpha, 1-\alpha)$, $(0, \beta)$ et $(\gamma, 0)$.

1. Justifier brièvement que $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ et que $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$.

   Solution: B' a pour abscisse 0, ce point est donc sur la droite (AC). C' a pour ordonnée 0, donc appartient à (AC) tandis que les coordonnées de A' vérifient l'équation $x + y = 1$, qui est celle de (BC). $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$ découle du fait que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et que les coordonnées de A, B, C sont respectivement $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

2. Donner une équation cartésienne de la droite $(A'B')$.

Solution: $(A'B')$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{B'A'} = \alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{AC}$. Un point M de coordonnées (x, y) appartient à $(A'B')$ si et seulement si $\det_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'A'}) = 0$, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} x & \alpha \\ y-\beta & 1-\alpha-\beta \end{vmatrix} = 0$. $(A'B')$ a donc pour équation: $(1-\alpha-\beta)x - \alpha(y-\beta) = 0$.

3. Donner, en fonction de α et β, une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (AB) et $(A'B')$ soient sécantes.

   Solution: En utilisant l'équation cartésienne de $(A'B')$ calculée dans la question précédente, on trouve facilement qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (AB) et $(A'B')$ soient sécantes est que $1-\alpha-\beta \neq 0$ (la droite (AB) ayant pour équation $y=0$). On pourrait aussi remarquer que (AB) et $(A'B')$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas colinéaires, ce qui est le cas si et seulement si $1-\alpha-\beta \neq 0$.

4. Soient h_1 l'homothétie de centre A' telle que $h_1(B) = C$, h_2 celle de centre B' telle que $h_2(C) = A$, et enfin h_3 l'homothétie de centre C' telle que $h_3(A) = B$.

   a) Calculer en fonction de α, β et γ, les rapports λ_1, λ_2, λ_3 des homothéties h_1, h_2 et h_3.

   Solution: Par définition, on a $\overrightarrow{A'C} = \lambda_1\overrightarrow{A'B}$, $\overrightarrow{B'A} = \lambda_2\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{C'B} = \lambda_3\overrightarrow{C'A}$.
   On trouve $\overrightarrow{A'C} = -\alpha\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B} = (1-\alpha)\overrightarrow{AB} - (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$, ce qui donne $\lambda_1 = \frac{-\alpha}{1-\alpha}$, de même, $\overrightarrow{B'A} = -\beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{B'C} = (1-\beta)\overrightarrow{AC}$, donc $\lambda_2 = \frac{-\beta}{1-\beta}$ et enfin
   $\overrightarrow{C'B} = (1-\gamma)\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'A} = -\gamma\overrightarrow{AB}$, donc $\lambda_3 = \frac{1-\gamma}{-\gamma}$.

   b) Donner, en fonction de α et β, une condition nécessaire et suffisante pour que $h_2 \circ h_1$ soit une translation.

   Solution: $h_2 \circ h_1$ a pour partie linéaire $\lambda_1\lambda_2 \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$.
   Une condition nécessaire et suffisante pour que $h_2 \circ h_1$ soit une translation est que $\lambda_1\lambda_2 = 1$, c'est-à-dire $\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} = 1$, ce qui équivaut à $1-\alpha-\beta = 0$ (cette condition équivaut à $(AB)//(A'B')$ d'après la question 3.)

   c) On suppose que $h_2 \circ h_1$ n'est pas une translation. Déterminer $(h_2 \circ h_1)(B)$ puis calculer les coordonnées du centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$. Faire un dessin expliquant la construction du centre de cette homothétie.

   Solution: Si $1-\alpha-\beta \neq 0$, alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie. On a $(h_2 \circ h_1)(B) = h_2(C) = A$. Le centre de cette homothétie est donc à l'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. En utilisant l'équation cartésienne de la droite $(A'B')$ calculée à la question 2., on trouve que le centre de $h_2 \circ h_1$ a pour coordonnées $(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}, 0)$.

   d) On suppose que les trois points A', B', C' sont alignés. Montrer qu'on a alors $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

   Solution: Si A', B' et C' sont alignés, alors les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en C'. Dans ces conditions, $h_2 \circ h_1$ est une une homothétie de centre C'. L'application affine $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ a pour partie linéaire $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$. On a $(h_3 \circ h_2 \circ h_1)(C') = C'$ et $(h_3 \circ h_2 \circ h_1)(A) = A$. Comme $A \neq C'$, on en déduit que $h_3 \circ h_2 \circ h_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, donc $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

   e) **(hors barème)** Réciproquement, montrer que si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, alors les points A', B' et C' sont alignés.

   Solution: Supposons $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. L'hypothèse faite sur les réels α, β, γ entraîne que $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, donc $h_2 \circ h_1$ est une homothétie dont le centre est à l'intersection de (AB) et $(A'B')$. Comme $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, nous pouvons affirmer que $h_3 \circ (h_2 \circ h_1)$ est une translation. Nous savons enfin, par définition de ces trois homothéties, que $(h_3 \circ h_2 \circ h_1)(A) = A$. Nous en déduisons que $h_3 \circ h_2 \circ h_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, donc $h_3 = (h_2 \circ h_1)^{-1}$, d'où C' est le centre de $h_2 \circ h_1$, qui est sur la droite $(A'B')$.

Exercice 3. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On note pr_1 la projection sur (BC) parallèlement à (CA), pr_2 la projection sur (CA) parallèlement à (AB), pr_3 la projection sur (AB) parallèlement à (BC) et on pose $f = \mathrm{pr}_3 \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1$. On rappelle que $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3$ sont des applications affines de $\mathcal{P}$.

1. Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ (il est conseillé de faire un dessin). Justifiez votre réponse.

   Solution: Par définition des différentes projections, nous avons $\mathrm{pr}_1(A) = C$, $\mathrm{pr}_2(C) = C$, $\mathrm{pr}_3(C) = B$, d'où $f(A) = B$. De même, $\mathrm{pr}_1(B) = B$, $\mathrm{pr}_2(B) = A$, $\mathrm{pr}_3(A) = A$, donc $f(B) = A$. Enfin, $\mathrm{pr}_1(C) = C$, $\mathrm{pr}_2(C) = C$, $\mathrm{pr}_3(C) = B$, donc $f(C) = B$.

2. Quelle est l'image de la droite (AB) par f? Justifiez votre réponse.

   Solution: Les différentes projections étant des applications affines, nous en déduisons que f est une application affine. Nous savons que l'image de la droite (AB) par f est un sous espace affine de dimension au plus 1. Comme $f(A)=B$ et $f(B)=A$, on a $f(AB)=(AB)$.

3. On note I le milieu du segment $[AB]$ montrer que $f(I)=I$.

   Solution: f est affine, donc conserve les barycentres. Il s'en suit que $f(I)$ est le milieu de $[f(A),\ f(B)]$, c'est-à-dire $f(I)=I$.

4. Soit M_0 un point de (AB), distinct de A, B et I (milieu du segment $[AB]$). On pose $M_1=\mathrm{pr}_1(M_0)$, $M_2=(\mathrm{pr}_2\circ\mathrm{pr}_1)(M_0)$, $M_3=f(M_0)$, $M_4=(\mathrm{pr}_1\circ f)(M_0)$, $M_5=(\mathrm{pr}_2\circ\mathrm{pr}_1\circ f)(M_0)$, $M_6=f^2(M_0)$.
   Sur une feuille quadrillée, faire un dessin et y placer les points $A, B, C, M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.
   Que remarquez-vous?

   Solution: En faisant soigneusement le dessin, on remarque que $M_6=M_0$.

5. Pour un point M de la droite (AB), que peut-on dire des points $f(M)$ et $f^2(M)$? Justifiez votre réponse.

   Solution: D'après la question 2., la restriction de f à (AB) est une application affine de cette droite dans elle-même. On sait que $f(I)=I$, $f(A)=B$ et $f(B)=A$; $f_{|(AB)}$ est donc une symétrie centrale. Pour $M\in(AB)$ est le symétrique de M dans dans la symétrie centrale de centre I et $f^2(M)=M$.
