Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2010/2011 - semestre 4 -

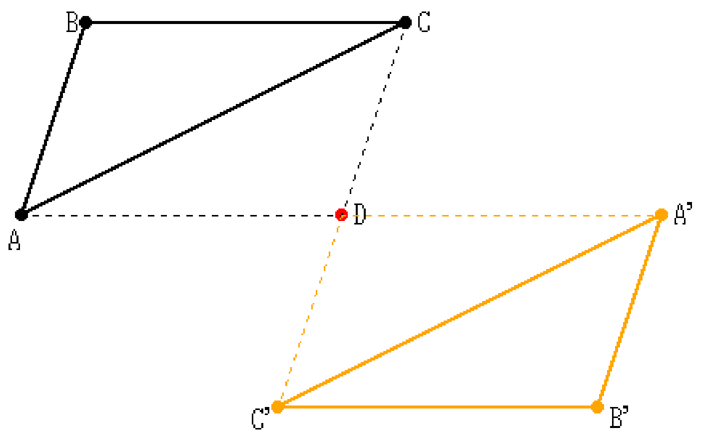
Corrigé succinct du partiel du 16 mai 2011

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Pour $M \in \mathcal{P}$, on note s_M la symétrie centrale de centre M. On considère trois points non alignés, A, B et C de $\mathcal{P}$ et on pose $f = s_C \circ s_B \circ s_A$.

1. Que peut-on dire de f?

   Solution: On a $\vec{f} = -\mathrm{id}_{\vec{\mathcal{P}}}$, donc f est une symétrie centrale.
   Notons D le centre de f. On a alors $s_C \circ s_B \circ s_A = s_D$, d'où $s_B \circ s_A = s_C \circ s_D$. Comme $s_B \circ s_A$ et $s_C \circ s_D$ sont des translations de vecteurs respectifs $2\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{DC}$, on en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc D est le translaté de C par le vecteur $\overrightarrow{BA}$ ($ABCD$ est un parallélogramme).

2. Faire un dessin et y placer les points $A, B, C, f(A), f(B)$ et $f(C)$.



Exercice 2. **(les trois questions de cet exercice sont indépendantes)**
L'espace euclidien usuel X est supposé muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$, $\vec{v}$ un vecteur non nul, $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$, $s_{\mathcal{P}}$, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

1. Montrer que $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{P}}$ admet un point fixe si et seulement si $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$.

   Solution: Supposons que $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{P}}$ admet un point fixe M. Si $M' = s_{\mathcal{P}}(M)$, on a $\overrightarrow{M'M} = \vec{v}$. Par définition de $s_{\mathcal{P}}$ on a $\overrightarrow{M'M} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$, d'où $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$.
   Réciproquement, si $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$, considérons un point quelconque N sur $\mathcal{P}$ et posons $M = t_{\frac{1}{2}\vec{v}}(N)$ (M est le translaté de N par le vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$). On constate alors facilement que M est un point fixe de $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{P}}$.

2. Trouver trois points non alignés M_1, M_2, M_3 tels que $d(M_i, \mathcal{P}) = 3$.
   ($d(M_i\mathcal{P})$ est la distance du point M_i au plan $\mathcal{P}$). On précisera les coordonnées de ces points.

   Solution: Le point N de coordonnées $(1, 1, 1)$ appartient à $\mathcal{P}$. Le vecteur $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ est normal à $\mathcal{P}$. Si A est un point quelconque de $\mathcal{P}$, alors le point A', translaté de A par le vecteur $\sqrt{3}\vec{v}$ est à la distance 3 de $\mathcal{P}$. il ne reste plus qu'à trouver trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On voit facilement que $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{j} - \vec{k})$ engendre $\vec{\mathcal{P}}$. Les trois points de coordonnées respectives $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$ et $(1, 2, 0)$ sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On en déduit que les points $M_1(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$, $M_2(2+\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$, $M_3(1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, \sqrt{3})$ sont non alignés et à la distance 3 de $\mathcal{P}$.

3. Munir $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Si $M \in X$ a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quelles sont les coordonnées de son projeté orthogonal M' dans le repère $\mathcal{R}'$?

Solution: On peut prendre pour O' le point de coordonnées $(1,\,1,\,1)$. En considérant l'équation de $\mathcal{P}$, un vecteur $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ appartient à $\vec{\mathcal{P}}$ si et seulement si $a+b+c=0$. On voit facilement que l'on peut prendre par exemple pour base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$, $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, avec $\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$, $\vec{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$.
Si $\overrightarrow{O'M'}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$, on a $x_1=<\overrightarrow{O'M},\vec{e}_1>$ et $x_2=<\overrightarrow{O'M},\vec{e}_2>$.
Un simple calcul donne alors $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0-y_0)$ et $x_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(x_0+y_0-2z_0)$.

Exercice 3. Le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$. On note $(x,\,y)$ les coordonnées d'un point dans ce repère et on considère $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations respectives

$$7x-y-13=0 \quad \text{et} \quad 4x+3y-11=0.$$

1. Donner les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

   Solution: En résolvant le système linéaire $\left\{\begin{array}{l} 7x-y-13=0 \\ 4x+3y-11=0 \end{array}\right.$, on trouve que ces deux droites se coupent en le point $M_0(2,1)$.

2. Donner des vecteurs directeurs unitaires de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

   Solution: En utilisant les équations des droites, on trouve par exemple que $\mathcal{D}_1$ admet pour vecteur directeur $v_1=\frac{1}{5\sqrt{2}}(\vec{i}+7\vec{j})$ et $\mathcal{D}_2$ admet pour vecteur directeur $v_2=\frac{1}{5}(-3\vec{i}+4\vec{j})$.

3. Combien y-a-t-il de rotations ρ telles que $\rho(\mathcal{D}_1)=\mathcal{D}_2$? Justifiez votre réponse.

   Solution: Soit ρ une rotation telle que $\rho(\mathcal{D}_1)=\mathcal{D}_2$. Si $\vec{\rho}$ est la partie linéaire de ρ, alors on a $\vec{\rho}(v_1)=\pm v_2$. Il y a par exemple deux rotations de centre M_0 (point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$) qui envoient $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$. Notons ρ_1 la rotation de centre M_0 telle que $\vec{\rho_1}(v_1)=v_2$. Pour $\vec{v}\in\vec{\mathcal{D}_2}$, considérons $t_{\vec{v}}\circ\rho_1$ où $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$. $t_{\vec{v}}\circ\rho_1$ est une rotation qui envoie $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$. Il y a donc une infinité de rotations (affines) qui envoient $\mathcal{D}_1$ sur $\mathcal{D}_2$.

4. Donner une mesure de l'angle orienté de droites $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$.

   Solution: Soit θ une mesure de l'angle orienté de vecteurs (v_1,v_2).
   On a $\cos\theta=<v_1,v_2>=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta=\det_{(\vec{i},\vec{j})}(v_1,v_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit que que $\theta=\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$, donc une mesure de l'angle orienté de droites $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ est $\frac{\pi}{4}$ (modulo π).

5. On note $s_{\mathcal{D}_i}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}_i$ et on pose $f=s_{\mathcal{D}_2}\circ s_{\mathcal{D}_1}$.

   a) Que peut-on dire de f?

      Solution: f est la composée de deux réflexions planes par rapport à deux droites sécantes en $M_0(2,1)$; c'est donc une rotation de centre $M_0(2,1)$ et d'angle de mesure $2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

   b) Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$?

      Solution: On sait que la matrice (dans toute base orthonormée directe) d'une rotation vectorielle d'angle de mesure φ s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Ici on a $\varphi=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.
      La matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) Donner les coordonnées de $f(O)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

      Solution: Soit M_0 le centre de la rotation f. On a par définition, $\overrightarrow{M_0f(O)}=\vec{f}(\overrightarrow{M_0O})$. Si $f(O)$ a pour coordonnées $(x',\,y')$, on a: $\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On en déduit alors que $f(O)$ a pour coordonnées $(3,-1)$.

   d) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x+y=0$. Donner une équation cartésienne de la droite $f(\mathcal{D})$.

      Solution: $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{i}-\vec{j}$. $f(\mathcal{D})$ a donc pour vecteur directeur $\vec{f}(\vec{i}-\vec{j})=\vec{i}+\vec{j}$. Comme $f(\mathcal{D})$ passe par $M_0(3,-1)$, $f(\mathcal{D})$ a pour équation cartésienne, $(x-3)-(y+1)=0$.

6. Faire un dessin, y tracer les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}$ et $f(\mathcal{D})$.