Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2010/2011 - semestre 4 -

Partiel du 28 mars 2011 (durée: 1h30) - Barème (à titre indicatif): 5, 11, 8

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. On considère dans un espace affine réel de dimension au moins 2, trois points non alignés A, B et C. A tout point M de X on associe le point M', barycentre des points A, B, C, M affectés respectivement des coefficients -3, 2, 1 et 2. On définit ainsi une application $f\colon X \longrightarrow X$.

1. Montrer que f est une translation (préciser le vecteur définissant la translation).
2. Faire un dessin et y placer les points $A, B, C, f(A), f(B)$ et $f(C)$.

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On muni $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On note (x, y) les coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$ dans ce repère.

Pour α, β et γ trois nombres réels pris dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on considère les points A', B' et C' dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(\alpha, 1-\alpha)$, $(0, \beta)$ et $(\gamma, 0)$.

1. Justifier brièvement que $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ et que $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite $(A'B')$.
3. Donner, en fonction de α et β, une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (AB) et $(A'B')$ soient sécantes.
4. Soient h_1 l'homothétie de centre A' telle que $h_1(B) = C$, h_2 celle de centre B' telle que $h_2(C) = A$, et enfin h_3 l'homothétie de centre C' telle que $h_3(A) = B$.
   a) Calculer en fonction de α, β et γ, les rapports λ_1, λ_2, λ_3 des homothéties h_1, h_2 et h_3.
   b) Donner, en fonction de α et β, une condition nécessaire et suffisante pour que $h_2 \circ h_1$ soit une translation.
   c) On suppose que $h_2 \circ h_1$ n'est pas une translation. Déterminer $(h_2 \circ h_1)(B)$ puis calculer les coordonnées du centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$. Faire un dessin expliquant la construction du centre de cette homothétie.
   d) On suppose que les trois points A', B', C' sont alignés. Montrer qu'on a alors $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.
   e) **(hors barème)** Réciproquement, montrer que si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, alors les points A', B' et C' sont alignés.

Exercice 3. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On note pr_1 la projection sur (BC) parallèlement à (CA), pr_2 la projection sur (CA) parallèlement à (AB), pr_3 la projection sur (AB) parallèlement à (BC) et on pose $f = \mathrm{pr}_3 \circ \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1$. On rappelle que $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \mathrm{pr}_3$ sont des applications affines de $\mathcal{P}$.

1. Déterminer $f(A), f(B)$ et $f(C)$ (il est conseillé de faire un dessin). Justifiez votre réponse.
2. Quelle est l'image de la droite (AB) par f? Justifiez votre réponse.
3. On note I le milieu du segment $[AB]$ montrer que $f(I) = I$.
4. Soit M_0 un point de (AB), distinct de A, B et I (milieu du segment $[AB]$). On pose $M_1 = \mathrm{pr}_1(M_0)$, $M_2 = (\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1)(M_0)$, $M_3 = f(M_0)$, $M_4 = (\mathrm{pr}_1 \circ f)(M_0)$, $M_5 = (\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1 \circ f)(M_0)$, $M_6 = f^2(M_0)$.
   Sur une feuille quadrillée, faire un dessin et y placer les points $A, B, C, M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.
   Que remarquez-vous?
5. Pour un point M de la droite (AB), que peut-on dire des points $f(M)$ et $f^2(M)$? Justifiez votre réponse.