Université de Nice Sophia Antipolis | Licence L2 - Géométrie

Année 2010/2011 - semestre 4 -

Partiel du 16 mai 2011 (durée: 1h30) - Barème (à titre indicatif): 3, 7, 12

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Pour $M \in \mathcal{P}$, on note s_M la symétrie centrale de centre M. On considère trois points non alignés, A, B et C de $\mathcal{P}$ et on pose $f = s_C \circ s_B \circ s_A$.

1. Que peut-on dire de f?

2. Faire un dessin et y placer les points A, B, C, $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$.

Exercice 2. (les trois questions de cet exercice sont indépendantes)
L'espace euclidien usuel X est supposé muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$, $\vec{v}$ un vecteur non nul, $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$, $s_{\mathcal{P}}$, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

1. Montrer que $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{P}}$ admet un point fixe si et seulement si $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$.

2. Trouver trois points non alignés M_1, M_2, M_3 tels que $d(M_i, \mathcal{P}) = 3$.
   ($d(M_i\mathcal{P})$ est la distance du point M_i au plan $\mathcal{P}$). On précisera les coordonnées de ces points.

3. Munir $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Si $M \in X$ a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quelles sont les coordonnées de son projeté orthogonal M' dans le repère $\mathcal{R}'$?

Exercice 3. Le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note (x, y) les coordonnées d'un point dans ce repère et on considère $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations respectives

$$7x - y - 13 = 0 \quad \text{et} \quad 4x + 3y - 11 = 0.$$

1. Donner les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2. Donner des vecteurs directeurs unitaires de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

3. Combien y-a-t-il de rotations ρ telles que $\rho(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$? Justifiez votre réponse.

4. Donner une mesure de l'angle orienté de droites $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

5. On note $s_{\mathcal{D}_i}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}_i$ et on pose $f = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.

   a) Que peut-on dire de f?

   b) Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

   c) Donner les coordonnées de $f(O)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

   d) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + y = 0$. Donner une équation cartésienne de la droite $f(\mathcal{D})$.

6. Faire un dessin, y tracer les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}$ et $f(\mathcal{D})$.
