Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2012/2013 - semestre 4 -

Corrigé succinct de l'interrogation écrite du 30 avril 2013

Exercice 1. Le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ est supposé muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note (x, y) les coordonnées d'un point dans ce repère.

1. On considère dans $\mathcal{P}$ une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq (0, 0)$), un point M de coordonnées (x_0, y_0) et on note $d(M, \mathcal{D})$ la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$. Montrer que
$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Solution: La normale à $\mathcal{D}$ passant par M a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
Si N est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, N a pour coordonnées $(x_0 + at, y_0 + bt)$, avec
$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$. Ce qui donne pour N, $t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$.
La distance de M à $\mathcal{D}$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
On en déduit $d(M, \mathcal{D}) = |t| \times \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2. Soient A un point de coordonnées (a_1, a_2), B un point distinct de A. On pose $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ et on note $\mathcal{D}$ la droite (AB).

   a) Donner en fonction de a_1, a_2, α et β une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ (droite (AB)).

   Solution: Un point P de coordonnées (x, y) appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont liés. Ce qui équivaut à $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = 0$, c'est-à-dire
   $(x - a_1) \times \beta - (y - a_2) \times \alpha = 0$ ou encore $\beta x - \alpha y - a_1\beta + a_2\alpha = 0$.

   b) Pour $M \in \mathcal{P}$, on note $d(M, \mathcal{D})$ la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$. Montrer que
   $$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times d(M, \mathcal{D}) = \left|\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})\right|.$$
   Solution: D'après la question 1. et le 2.a) ci-dessus, si M est un point ayant pour coordonnées (x_0, y_0), alors $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{|\beta x_0 - \alpha y_0 - a_1\beta + a_2\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.
   Comme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, on a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times d(M, \mathcal{D}) = |\beta x_0 - \alpha y_0 - a_1\beta + a_2\alpha|$.
   Il ne reste plus qu'à voir que $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \beta x_0 - \alpha y_0 - a_1\beta + a_2\alpha$.

3. On considère A, B et C les trois points de coordonnées respectives $(1, 1)$, $(2, 3)$ et $(4, -1)$. En utilisant la formule de la question 2.b), calculer la distance du point C à la droite (AB).
Solution: On a $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j}$, donc $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 8$. La formule trouvée dans la question précédente donne alors $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

Exercice 2. Dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux points A et B de coordonnées respectives $(2, 0)$ et $(0, 1)$. On note $\mathcal{D}$ la droite (AB), $s_{\mathcal{D}}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$. On rappelle que la partie linéaire $\vec{s_{\mathcal{D}}}$ de $s_{\mathcal{D}}$ est la réflexion vectorielle d'axe $\vec{\mathcal{D}}$.

1. Donner la matrice de $\vec{s_{\mathcal{D}}}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.
Solution: La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Posant $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, nous obtenons une base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ de $\vec{\mathcal{P}}$ dans laquelle $\vec{s_{\mathcal{D}}}$ a pour matrice $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice P faisant passer de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si S est la matrice de $\vec{s_{\mathcal{D}}}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$, nous avons $P^{-1}SP = S'$. On en déduit que $S = PS'P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

2. Donner les coordonnées du point $O' = s_{\mathcal{D}}(O)$.

Solution: Comme $s_{\mathcal{D}}(A) = A$, nous avons $\overrightarrow{O'A} = \vec{s_{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{OA})$, d'où en utilisant la matrice S trouvée dans la question précédente, $\overrightarrow{O'A} = \frac{1}{5}(6\vec{i} - 8\vec{j})$. On en déduit que O' a pour coordonnées $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Nous aurions pu aussi arriver au même résultat en remarquant que $\vec{\mathcal{D}}^{\perp}$ ayant pour vecteur directeur unitaire $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{v}$ où $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, si N est le projeté ortogonal de O sur $\mathcal{D}$ (la droite (AB)), alors on obtient $\overrightarrow{AO} - (\overrightarrow{AO} \cdot \vec{w})\vec{w} = \overrightarrow{AN}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{ON} = -(\overrightarrow{AO} \cdot \vec{w})\vec{w}$.
On en déduit $\overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}(\vec{i} + 2\vec{j})$, donc $\overrightarrow{OO'} = \frac{4}{5}(\vec{i} + 2\vec{j})$. Ainsi, O' a pour coordonnées $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

3. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. On note (x', y') les coordonnées de $s_{\mathcal{D}}(M)$ dans le même repère. Calculer x' et y' en fonction de x et y.

Solution: $s_{\mathcal{D}}$ étant une application affine, nous avons $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}(O)s_{\mathcal{D}}(M)} = \vec{s_{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{OM})$, donc $\overrightarrow{O'M'} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, avec $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Comme O' a pour coordonnées $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$, on a $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x - 3y + 8) \end{cases}$.

4. Soit s_O la symétrie centrale de centre O (origine du repère). On pose $f = s_O \circ s_{\mathcal{D}}$. On note Δ la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ et passant par O.

   a) Décrire la partie linéaire $\vec{f}$ de f.

   Solution: Comme $\vec{s_O} = -\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$, on a $\vec{f} = -s_{\vec{\mathcal{D}}} = s_{\vec{\Delta}}$.

   b) Montrer que $f(\Delta) = \Delta$ et décrire la restriction de f à Δ.

   Solution: Les points O et $O' = s_{\mathcal{D}}(O)$ appatiennent à Δ. Nous avons $f(O') = O$. Comme $\vec{f}(\vec{\Delta}) = \vec{\Delta}$, cela donne $f(\Delta) = \Delta$. Δ étant stable par f, la restriction $f_{|\Delta}$ de f à Δ est une application affine. De $\vec{f} = -s_{\vec{\mathcal{D}}} = s_{\vec{\Delta}}$, on déduit que $\overrightarrow{f_{|\Delta}} = \mathrm{Id}_{\vec{\Delta}}$, donc $f_{|\Delta}$ est une translation. C'est la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O} = -\frac{1}{5}(4\vec{i} + 8\vec{j})$.
