Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2012/2013 - semestre 4 -

Corrigé succinct du partiel du 26 mars 2013

Exercice 1. Soit X un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$. On note $(x,\,y,\,z)$ les coordonnées d'un point M de X dans le repère $\mathcal{R}$ et on considère $\mathcal{P}$, le plan d'équation $3x+y-2z-3=0$.

1. Soient M_0 le point de coordonnées $(1,2,1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant M_0 et de vecteur directeur $\vec{v}=\vec{i}\,-\vec{j}\,+\vec{k}\,$. Expliquer pourquoi la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

   Solution: On vérifie facilement que les coordonnées du point M_0 satisfont à l'équation définissant le plan$\mathcal{P}$. Si on note (a,b,c) les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ de $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on a $\vec{u}\in\vec{\mathcal{P}}$ si et seulement si $3a+b-2c=0$ (équation homogène associée à celle du plan). On vérifie ainsi que les coordonnées $(1,-1,1)$ de $\vec{v}$ satisfont à cette équation homogène. En résumé, on a $M_0\in\mathcal{P}$ et $\vec{\mathcal{D}}\subset\vec{\mathcal{P}}$, donc $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}$.

2. Trouver sur le plan $\mathcal{P}$, quatre points non alignés A, B, C et D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme (rappel: $\vec{AB}=\vec{DC}$).

   Solution: Considérons un vecteur $\vec{w}\in\vec{\mathcal{P}}$ tel que $(\vec{v}\,,\vec{w}\,)$ soit libre. Il suffit alors de poser $A=M_0$, $\vec{AB}=\vec{v}\,$, $\vec{AD}=\vec{w}$ et $\vec{AC}=\vec{v}+\vec{w}$ pour avoir le parallélogramme en question. Prenons par exemple $\vec{w}=2\vec{j}+\vec{k}\,$. Les points A, B, C et D sont dans $\mathcal{P}$ et ont pour coordonnées respectives

   $$(1,2,1),\ (2,1,2),\ (2,3,3)\ \text{et}\ \ (1,4,2).$$

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On munit $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R}=\big(A,\ \vec{AB},\ \vec{AC}\big)$. Soit m un paramètre réel tel que $m(m-1)\neq 0$. On note Ω le point de $\mathcal{P}$, de coordonnées $(m,1-m)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Vérifier que le point Ω se trouve sur la droite (BC) et que Ω est distinct de B et C.

   Solution: On a $\vec{BC}=-\vec{AB}+\vec{AC}$, $\ \vec{B\Omega}=(m-1)\,\vec{AB}+(1-m)\,\vec{AC}=(1-m)\big(-\vec{AB}+\vec{AC}\big)$. Les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{B\Omega}$ étant colinéaires, on a bien $\Omega\in(BC)$. Ω est distinct de B et C car du fait que $m\neq 0$ et $m\neq 1$, on a $(m,1-m)\neq(1,0)$ et de même $(m,1-m)\neq(0,1)$.

2. On note h_Ω l'homothétie de centre Ω envoyant B sur C (c'est-à-dire $h_\Omega(B)=C$), $t_{\vec{AB}}$ la translation de vecteur $\vec{AB}$, puis on pose $f=h_\Omega\circ t_{\vec{AB}}$ et $g=t_{\vec{AB}}\circ h_\Omega$.

   a) Donner (en fonction de m) le rapport de l'homothétie h_Ω.

   Solution: Nous avons $\vec{\Omega C}=-m\,\vec{AB}+m\,\vec{AC}$, $\ \vec{\Omega B}=(m-1)\big(-\vec{AB}+\vec{AC}\big)$. On en déduit facilement que $\vec{\Omega C}=\dfrac{m}{m-1}\vec{\Omega B}$. L'homothétie h_Ω a donc pour rapport $\lambda=\dfrac{m}{m-1}$.

   b) Montrer que f et g sont des homothéties. Préciser leurs rapports et les coordonnées (dans le repère $\mathcal{R}$) de leurs centres respectifs.

   Solution: $t_{\vec{AB}}$ ayant pour partie linéaire $\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$ (c'est le cas pour toute translation), les applications affines f et g ont pour partie linéaire $\vec{f}=\vec{g}=\vec{h_\Omega}=\dfrac{m}{m-1}\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$. Comme $\dfrac{m}{m-1}\neq 1$, f et g admettent chacune un unique point fixe. Ces deux applications affines sont donc des homothéties de même rapport $\lambda=\dfrac{m}{m-1}$. Notons Ω_1 et Ω_2 les centres respectifs de f et g.
   Nous avons $h_\Omega\big(t_{\vec{AB}}(\Omega_1)\big)=\Omega_1$, donc $\vec{\Omega\Omega_1}=\dfrac{m}{m-1}\big(\vec{\Omega\Omega_1}+\vec{AB}\big)$.
   Ainsi $\left(1-\dfrac{m}{m-1}\right)\vec{\Omega\Omega_1}=\dfrac{m}{m-1}\vec{AB}$, ce qui équivaut à $-\vec{\Omega\Omega_1}=m\,\vec{AB}$.
   On en déduit que $\vec{A\Omega_1}=\vec{A\Omega}-m\,\vec{AB}=(1-m)\,\vec{AC}$. Ω_1 a donc pour coordonnées $(0,1-m)$.

   Nous aurions aussi pu remarquer que: comme $f(A)=C$, Ω_1 est sur la droite (AC); par définition de f, Ω_1 est sur la parallèle à (AB) passant par Ω; d'où les coordonnées $(0,1-m)$ pour Ω_1.

   Pour Ω_2, on a $t_{\vec{AB}}(h_\Omega(\Omega_2))=\Omega_2$, donc $\vec{h_\Omega(\Omega_2)\Omega_2}=\vec{AB}$, ou encore $\vec{h_\Omega(\Omega_2)\Omega}+\vec{\Omega\Omega_2}=\vec{AB}$.
   Ce qui donne par définition de h_Ω, $-\dfrac{1}{m-1}\vec{\Omega\Omega_2}=\vec{AB}$, c'est-à-dire $\vec{\Omega\Omega_2}=(1-m)\,\vec{AB}$.
   On en déduit ensuite $\vec{A\Omega_2}=\vec{AB}+(1-m)\,\vec{AC}$, donc Ω_2 a pour coordonnées $(1,1-m)$.

Ici encore, si on pose $D = g(B)$, on a $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. On en déduit que Ω_2 est sur la parallèle à (AB) passant par B. De même Ω_2 est sur la parallèle à (AB) passant par Ω. D'où les coordonnées $(1, 1-m)$ pour Ω_2.

c) Avec une valeur de m de votre choix ($m(m-1) \neq 0$), faire un dessin et y placer A, B, C, Ω et les centres des homothéties f et g.

Solution: En prenant par exemple $m = \frac{1}{2}$, Ω est le milieu de $[BC]$, Ω_1 le milieu de $[AC]$, Ω_2 le milieu de $[BD]$ où $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$ est le point de coordonnées $(1, 1)$.

Exercice 3. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On munit $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Soient α, β, γ, μ des réels tels que $\mu \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma + \mu \neq 0$. À tout point M de $\mathcal{P}$ on associe le point M', barycentre des points A, B, C et M affectés respectivement des poids α, β, γ et μ.

$$M' = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, \mu)).$$

On construit ainsi une application $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$; $M \mapsto M' = f(M)$.

1. Montrer que si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors le point $M_0 = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$ est un point fixe de f.

   Solution: Comme $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, par associativité du barycentre on a $f(M_0) = \mathrm{Bar}((M_0, \alpha + \beta + \gamma), (M_0, \mu))$. D'où évidemment $f(M_0) = M_0$.

2. Montrer que si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors f est une homothétie dont on précisera (en fonction de α, β, γ, μ) le rapport et les coordonnées du centre dans le repère $\mathcal{R}$.

   Solution: Pour tout point M, nous avons $f(M) = \mathrm{Bar}((M_0, \alpha + \beta + \gamma), (M, \mu))$, donc $(a + \beta + \gamma)\, \overrightarrow{f(M)M_0} + \mu \overrightarrow{f(M)M} = \vec{0}$. Ce qui donne, en utilisant la relation de Chasles, $(\alpha + \beta + \gamma + \mu)\, \overrightarrow{f(M)M_0} + \mu \overrightarrow{M_0M} = \vec{0}$. Conclusion: $\overrightarrow{M_0 f(M)} = \dfrac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu} \overrightarrow{M_0M}$.

   f est donc une homothétie de centre M_0 et de rapport $\dfrac{\mu}{\alpha + \beta + \gamma + \mu}$.
   De l'égalité $\alpha\, \overrightarrow{M_0A} + \beta \overrightarrow{M_0B} + \gamma \overrightarrow{M_0C} = \vec{0}$ on déduit facilement que $\overrightarrow{AM_0} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$, donc M_0 a pour coordonnées $\left(\dfrac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}, \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

3. Montrer que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors f est une translation de vecteur $\vec{v}$ dont on précisera les coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

   Solution: Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors pour tout point M, de la relation
   $$\alpha\, \overrightarrow{f(M)A} + \beta \overrightarrow{f(M)B} + \gamma \overrightarrow{f(M)C} + \mu \overrightarrow{f(M)M},$$
   on déduit, en utilisant la relation de Chasles, $\beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{f(M)M} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{Mf(M} = \dfrac{\beta}{\mu} \overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\mu} \overrightarrow{AC}$.
   Conclusion: f est une translation de vecteur $\vec{v} = \dfrac{\beta}{\mu} \overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\mu} \overrightarrow{AC}$.
   Les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont donc $\left(\dfrac{\beta}{\mu}, \dfrac{\gamma}{\mu}\right)$.

4. Soient f_1 et f_2 les deux applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définies par
   $$\forall M \in \mathcal{P}, \quad f_1(M) = \mathrm{Bar}((A, 3), (B, -1), (C, -1), (M, 1)), \quad f_2(M) = \mathrm{Bar}((A, 1), (B, -3), (C, 1), (M, 2)).$$

   a) Donner une description (la plus complète possible) de f_1 et f_2.

      Solution: Daprès la question 2), f_1 et f_2 sont des homothéties de rapports et de centres respectifs $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$, Ω_1 (de coordonnées $(-1, -1)$), Ω_2 (de coordonnées $(3, -1)$).

   b) Que peut-on dire des applications $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$? (Donner une description la plus complète possible de ces deux applications).

      Solution: On a $\overrightarrow{f_2 \circ f_1} = \overrightarrow{f_1 \circ f_2} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$. $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$ sont donc des translations.
      Notons $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vecteurs de translations associés respectivement à $f_2 \circ f_1$ et $f_1 \circ f_2$.
      On a $\vec{v}_1 = \overrightarrow{\Omega_1 f_2(f_1(\Omega_1))} = \overrightarrow{\Omega_1 f_2(\Omega_1)} = \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} + \overrightarrow{\Omega_2 f_2(\Omega_1)}$. D'où par définition de f_2,
      $$\vec{v}_1 = \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} + 2\, \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} = -\, \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = -4\, \overrightarrow{AB}.$$
      De même pour $\vec{v}_2$ on a $\vec{v}_2 = \overrightarrow{\Omega_2 f_1(f_2(\Omega_2))} = \overrightarrow{\Omega_2 f_1(\Omega_2)}$. Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{\Omega_2 f_1(\Omega_2)} = \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 f_1(\Omega_2)}$. D'où par définition de f_1,
      $$\vec{v}_2 = \overrightarrow{\Omega_2\Omega_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = -2\, \overrightarrow{AB}.$$