Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2012/2013 - semestre 4 -

Corrigé succinct du partiel du 4 juin 2013

Exercice 1. Dans le plan affine euclidien usuel on considère trois points non alignés A, B et C. On note f la symétrie centrale de centre A et g la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
On pose $h_1 = f \circ g$ et $h_2 = g \circ f$.

1. Expliquer comment décomposer la translation g en la composée de deux symétries centrales.

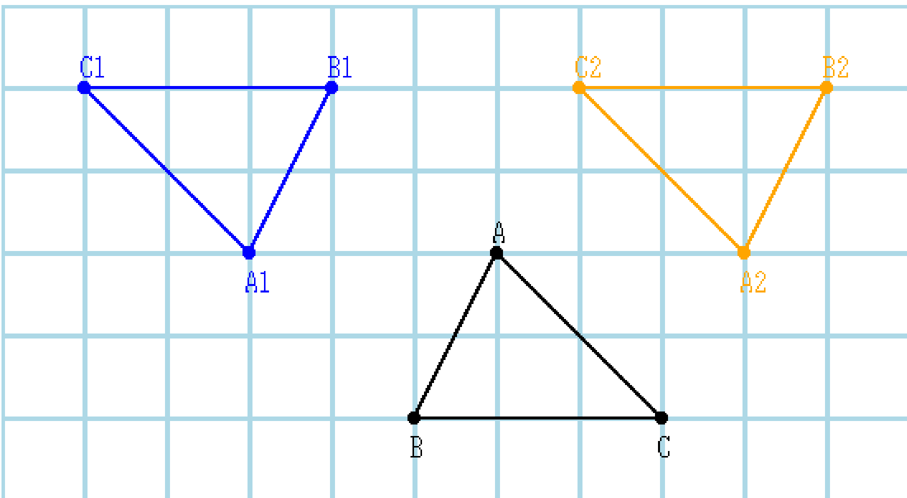
   Solution: Pour un point M du plan, notons s_M la symétrie centrale de centre M. Nous avons donc $f = s_A$. Pour décomposer la translation g en la composée de deux symétries centrales, on se donne deux points M_1 et M_2 du plan tels que $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On a alors $g = s_{M_2} \circ s_{M_1}$. On peut commencer par prendre M_1 quelconque et M_2 s'obtient en translatant M_1 du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

2. Montrer que h_1 et h_2 sont des symétries centrales et préciser comment on construit leurs centres respectifs.

   Solution: En écrivant que $g = s_A \circ s_{A'}$ avec $2\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{BC}$, on a $h_1 = s_A \circ (s_A \circ s_{A'}) = s_{A'}$. h_1 est donc une symétrie centrale de centre A'. A' se déduisant de A par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. De même, en écrivant $g = s_{A''} \circ s_A$, on a $h_2 = (s_{A''} \circ s_A) \circ s_A = s_{A''}$. h_2 est alors la symétrie centrale de centre A''. A'' se déduit de A par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

3. Faire un dessin propre et y placer les points $h_1(A)$, $h_1(B)$, $h_1(C)$, $h_2(A)$, $h_2(B)$ et $h_2(C)$.

   Solution: Dans le dessin ci-dessous, $A_i = h_i(A)$, $B_i = h_i(B)$ et $C_i = h_i(C)$.



Exercice 2. Soient X un espace affine euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et m un paramètre réel.
On considère f_m: $X \longrightarrow X$ l'application affine qui à un point M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ dans le repère $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées (x', y', z') dans le même repère, données par:

$$(x', y', z') = (y+m, -z+2, -x-m).$$

1. Donner la matrice de la partie linéaire $\overrightarrow{f_m}$ de f_m, dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{X}$.

   Solution: Si M est un point de de coordonnées (x,y,z), on a $\overrightarrow{f_m(O)f_m(M)} = \overrightarrow{f_m}(\overrightarrow{OM})$. On en déduit $\overrightarrow{f_m}(\overrightarrow{OM}) = y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k}$, donc la matrice de $\overrightarrow{f_m}$ est $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que f_m est une isométrie positive.

   Solution: f_m est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{f_m}$ est orthogonale, c'est-à-dire ${}^tSS = I_3$. Égalité que l'on peut facilement vérifier. Un calcul du déterminant de S, donne $\det(S) = 1$, donc f_m est une isométrie positive.

3. On note $\mathcal{F}_m$ l'ensemble des points fixes de f_m.

   a) Montrer que $\mathcal{F}_m$ est non vide si et seulement si $m=-1$. Donner ensuite une description la plus complète possible de $\mathcal{F}_{-1}$.

   Solution: Un point M est point fixe de f_m si et seulement si ses coordonnées $(x,\ y,\ z)$ vérifient le système linéaire $\begin{cases} x = y+m \\ y = -z+2 \\ z = -x-m \end{cases}$, système qui équivaut à $\begin{cases} y = x-m \\ z = -x-m \\ 2m+2 = 0 \end{cases}$.
   Ce système linéaire admet au moins une solution si et seulement si $2m+2=0$, c'est-à-dire $m=-1$. On en déduit que $\mathcal{F}_m$ est non vide si et seulement si $m=-1$. Lorsque $m=-1$, les points fixes de f_m sont les points dont les coordonnées s'écrivent $(x,\ x+1,\ -x+1)$, avec x parcourant $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{F}_{-1}$ est donc la droite passant par le point M_0 de coordonnées $(0,1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

   b) On suppose que $\mathcal{F}_m$ est non vide. Montrer qu'alors $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$ (*où* $f_m^3 = f_m \circ f_m \circ f_m$) et préciser la nature de l'isométrie f_m.

   Solution: Supposons $\mathcal{F}_m$ non vide, c'est-à-dire $m=-1$. On alors $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$ si et seulement $\overrightarrow{f_m}^3 = \mathrm{Id}_{\vec{X}}$. Par un calcul matriciel on trouve $S^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = I_3$. D'où le résultat.
   Lorsque $m=-1$, f_m est une isométrie positive admettant une droite $\mathcal{D}$ de points fixes (d'après la question a) ci-dessus). f_m est donc une rotation d'axe $\mathcal{D}$. Après orientation de cet axe $\mathcal{D}$, on peut dire que f_m est une rotation d'angle θ. Comme $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$, on $3\theta = 0(2\pi)$, donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.

   c) A-t-on encore $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$ lorsque $\mathcal{F}_m$ est vide? Justifiez votre réponse.

   Solution: On ne peut avoir $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$ lorsque $\mathcal{F}_m$ est vide. En effet, si $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$, alors quel que soit $M \in X$, le triplet $\{M,\ f_m(M),\ f_m^2(M)\}$ est invariant par f_m. f_m étant affine, l'isobarycentre de $\{M, f_m(M), f_m^2(M)\}$ est alors un point fixe de f_m.

Exercice 3. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est supposé orienté et muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère une rotation plane ρ de centre A et d'angle θ ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$) et une translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur non nul $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$. On pose $f = \rho \circ t_{\vec{v}}$ et on note $\vec{f}$ la partie linéaire de f.

1. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

   Solution: On a $\vec{f} = \vec{\rho} \circ \vec{t_{\vec{v}}} = \vec{\rho}$ car $\vec{t_{\vec{v}}} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$.
   On en déduit que $\vec{f}$ a pour matrice $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de $\vec{f}$ et dire pourquoi au vu de ce polynôme, on peut affirmer que f admet un et un seul point fixe.

   Solution: $\vec{f}$ a pour polynôme caractéristique $\det(S - XI_2)$. Ce polynôme est donc le trinôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$. Comme $\theta \neq 0\ (2\pi)$, ce trinôme ne peut admettre 1 pour valeur propre. Ce qui permet d'affirmer que f admet un et un seul point fixe (voir exercice 2, feuille TD n°3).

3. Montrer qu'il existe trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ telles que $\rho = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}$ et $t_{\vec{v}} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ (où $s_{\mathcal{D}_i}$ désigne la réflexion d'axe $\mathcal{D}_i$). Que peut-on dire de la transformation affine f?

   Solution: Soit $\mathcal{D}_2$ la droite passant par A et dont la direction est orthogonale au vecteur $\vec{v}$, $\mathcal{D}_1$ la droite déduite de $\mathcal{D}_2$ par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{v}$. On a $t_{\vec{v}} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. Soit enfin $\mathcal{D}_3$ l'image de $\mathcal{D}_2$ par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\theta}{2}$. Nous avons $\rho = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}$.
   Finalement, $\rho \circ t_{\vec{v}} = f = (s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}) \circ (s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1})$, donc $f = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_1}$. f est la composée de deux rélexions et admet un et un seul point fixe: c'est donc une rotation de centre A' et d'angle θ, avec A' le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.

4. On suppose que A est le point de coordonnées $(1, 1)$, ρ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. On pose $f = \rho \circ t_{\vec{v}}$.

   a) Expliciter pour cette transformation f, les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ de la question 3.

      Solution: $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$. $\mathcal{D}_1$ est la droite parallèle à $\mathcal{D}_2$ et passant par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{j}$.

   b) Donner une description la plus complète possible de la transformation f.

      Solution: D'après la question 3., f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, de centre A' le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$. On trouve facilement que ce centre a pour coordonnées $(1, 2)$.

   c) Faire un dessin propre, y tracer les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ (de la question précédente) et y placer les points O, A, $f(O)$ et $f(A)$.