Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2013 - 2014 - semestre 4 -

Interrogation écrite du 4 mars 2014 (durée: 30mn) - Barème (à titre indicatif): 10, 10.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Il sera tenu compte de la rédaction dans la notation des copies.

Exercice 1.
Dans un plan affine réel $\mathcal{P}$ on considère trois points non alignés, A, B, C et on munit $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = \left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$. Soit m un paramètre réel non nul et différent de 1 et de -1 $(m(m-1)(m+1) \neq 0)$. Par rapport à ce repère $\mathcal{R}$, on considère sur la droite (AB) le point C' de coordonnées $(m,\ 0)$ et sur la droite (AC) le point B' de coordonnées $(0, m)$.

1. Vérifier que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

2. Montrer que les droites (BB') et (CC') sont sécantes en un point D dont on précisera les coordonnées (dans le repère $\mathcal{R}$).

3. On note I le milieu de $[BC]$, I' le milieu de $[B'C']$. Montrer que A, I, I' et le point D trouvé dans la question précédente sont alignés.

4. Pour $m = 3$, faire un dessin et y placer les points A, B, C, D, B', C', I et I'.

Exercice 2.
Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On considère un quatrième point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme (rappel: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$). On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[CD]$ et on définit une application affine $f\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ en posant $f(A) = I$, $f(B) = J$, $f(C) = K$. La partie linéaire de f est notée $\vec{f}$.

1. Justifier l'égalité $\vec{f}\left(\overrightarrow{AD}\right) = \vec{f}\left(\overrightarrow{BC}\right)$. En déduire que $\overrightarrow{f(A)f(D)} = \overrightarrow{JK}$.

2. Faire un dessin et y placer les points A, B, C, D, $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$.

3. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

4. On note (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère cartésien $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$, (x', y') les coordonnées de $f(M)$ dans ce même repère. Calculer (x', y') en fonction de (x, y).

5. Résoudre l'équation $f(M) = M$.
