Université de Nice Sophia Antipolis | Licence L2 - Géométrie

Année 2013 - 2014 - semestre 4 -

Interrogation écrite du 22 avril 2014 (durée: 30mn) - Barème (à titre indicatif): 10, 12.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Il sera tenu compte de la rédaction dans la notation des copies.

Exercise 1. Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ on considère le plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $\boldsymbol{x-2y+z-2=0}$.

1. Munir $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,e_1,e_2)$ et pour un point $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, calculer les coordonnées (x_1,x_2) (dans le repère $\mathcal{R}$) du projeté orthogonal M' de M sur $\mathcal{P}$.

2. On pose $A_m=(m,\,0,\,2)$ où m est un paramètre réel. On note $d(A_m,\mathcal{P})$ la distance du point A_m au plan $\mathcal{P}$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel m le point A_m est-il à la distance 1 de $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire $d(A_m,\mathcal{P})=1$)?

Exercise 2. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=\left(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,\right)$. Pour $M\in\mathcal{P}$, on note $(x,\,y)$ les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{D}$ est une droite affine de $\mathcal{P}$, on note $d(M,\mathcal{D})$ la distance de M à la droite $\mathcal{D}$. On notera $d(M,O)$ la distance du point M à l'origine du repère.

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux droites affines d'équations cartésiennes respectives $\boldsymbol{4x-3y-10=0}$ et $\boldsymbol{y=-2}$.

1. On dit que le point M est équidistant à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si $d(M,\mathcal{D}_1)=d(M,\mathcal{D}_2)$. Montrer que le point M de coordonnées (x,y) est équidistant à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $(4x-3y-10)^2=25(y+2)^2$.
   En déduire que l'ensemble des points équidistants à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la réunion de deux droites Δ_1, Δ_2 et que ces deux droites sont orthogonales.

2. On dit que le point M est équidistant à O et $\mathcal{D}_2$ si $d(M,O)=d(M,\mathcal{D}_2)$. Montrer que le point M de coordonnées (x,y) est équidistant à O et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $x^2+y^2=(y+2)^2$.
   En déduire la nature de l'ensemble des points équidistants à O et $\mathcal{D}_2$.

3. Dans un repère orthonormé, tracer le lieu des points équidistants à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et le lieu des points équidistants à O et $\mathcal{D}_2$. D'après votre dessin, combien y a-t-il de points M équidistants à O, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (c'est-à-dire tels que $d(M,O)=d(M,\mathcal{D}_1)=d(M,\mathcal{D}2)$)?
