Corrigé succinct de l'interrogation écrite du 4 mars 2014

Exercice 1.
Dans un plan affine réel $\mathcal{P}$ on considère trois points non alignés, A, B, C et on munit $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit m un paramètre réel non nul et différent de 1 et de -1 ($m(m-1)(m+1) \neq 0$). Par rapport à ce repère $\mathcal{R}$, on considère sur la droite (AB) le point C' de coordonnées $(m, 0)$ et sur la droite (AC) le point B' de coordonnées $(0, m)$.

1. Vérifier que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

   Solution: on $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{B'C'} = m\,\overrightarrow{AB} - m\,\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{B'C'} = -m\,\overrightarrow{BC}$, donc les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

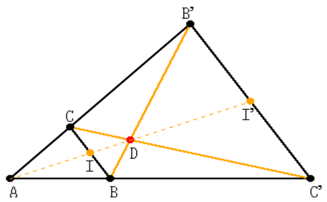
2. Montrer que les droites (BB') et (CC') sont sécantes en un point D dont on précisera les coordonnées (dans le repère $\mathcal{R}$).

   Solution: il nous suffit de déterminer l'intersection des droites (BB') et (CC') en utilisant leurs équations cartésiennes respectives. Dans le repère $\mathcal{R}$, les droites (BB') et (CC') ont respectivement pour équation $m(x-1)+y=0$ et $x+m(y-1)=0$. On résout alors le système $\begin{cases} x+m(y-1)=0 \\ m(x-1)+y=0 \end{cases}$ pour constater qu'il admet une et une seule solution: $\left(\frac{m}{m+1}, \frac{m}{m+1}\right)$. Les droites (BB') et (CC') sont donc sécantes au point D de coordonnées $\left(\frac{m}{m+1}, \frac{m}{m+1}\right)$.

3. On note I le milieu de $[BC]$, I' le milieu de $[B'C']$. Montrer que A, I, I' et le point D trouvé dans la question précédente sont alignés.

   Solution: ces quatre points ont respectivement pour coordonnées $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$ et $\left(\frac{m}{m+1}, \frac{m}{m+1}\right)$. On constate alors facilement qu'ils sont tous sur la droite d'équation $x = y$.

4. Pour $m = 3$, faire un dessin et y placer les points A, B, C, D, B', C', I et I'.



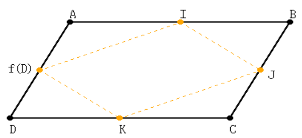
Exercice 2.
Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On considère un quatrième point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme (rappel: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$). On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[CD]$ et on définit une application affine $f\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ en posant $f(A) = I$, $f(B) = J$, $f(C) = K$. La partie linéaire de f est notée $\vec{f}$.

1. Justifier l'égalité $\vec{f}(\overrightarrow{AD}) = \vec{f}(\overrightarrow{BC})$. En déduire que $\overrightarrow{f(A)f(D)} = \overrightarrow{JK}$.

   Solution: $ABCD$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\vec{f}(\overrightarrow{AD}) = \vec{f}(\overrightarrow{BC})$. Nous avons $\vec{f}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{f(A)f(D)}$, $\vec{f}(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{f(B)f(C)} = \overrightarrow{JK}$. Conclusion: $\overrightarrow{f(A)f(D)} = \overrightarrow{JK}$.

2. Faire un dessin et y placer les points A, B, C, D, $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$.

   D'après la question précédente, $f(D)$ est le translaté de I par le vecteur $\overrightarrow{JK}$.



3. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

   Solution: on a $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{IJ}$. Par définition de I et J, on a $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. De même, $\vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\vec{f}$ a pour matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

4. On note (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, (x', y') les coordonnées de $f(M)$ dans ce même repère. Calculer (x', y') en fonction de (x, y).

   Solution: de l'écriture $\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{Af(A)} + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$ on déduit que $(x', y') = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(-y, \frac{1}{2}x + y\right)$.

5. Résoudre l'équation $f(M) = M$.

   Solution: d'après la question précédente, notant (x, y) les coordonnées de M, on a $f(M) = M$ si et seulement si $\begin{cases} -y + \frac{1}{2} = x \\ \frac{1}{2}x + y = y \end{cases}$. f admet dont pour unique point fixe le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
