Université de Nice Sophia Antipolis Licence L2 - Géométrie

Année 2013 - 2014 - semestre 4 -

Corrigé succinct de l'interrogation écrite du 22 avril 2014

**Exercise 1.** Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ on considère le plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $\boldsymbol{x - 2y + z - 2 = 0}$.

1. Munir $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ et pour un point $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer les coordonnées $(x_1, x_2)$ (dans le repère $\mathcal{R}$) du projeté orthogonal $M'$ de $M$ sur $\mathcal{P}$.

   Solution: il s'agit d'un énoncé quasi identique à celui de l'exercice n°4 de la feuille TD 4. On peut prendre par exemple $O = (0, 0, 2)$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}(1, 0, -1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. On a $x_1 = <\overrightarrow{OM}, e_1>$ et $x_2 = <\overrightarrow{OM}, e_2>$. On trouve facilement $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z + 2)$ et $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z - 2)$.

2. On pose $A_m = (m, 0, 2)$ où $m$ est un paramètre réel. On note $d(A_m, \mathcal{P})$ la distance du point $A_m$ au plan $\mathcal{P}$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel $m$ le point $A_m$ est-il à la distance 1 de $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire $d(A_m, \mathcal{P}) = 1$)?

   Solution: la distance d'un point $M = (x, y, z)$ à $\mathcal{P}$ est donnée par $d(M, \mathcal{P}) = \frac{|x - 2y + z - 2|}{\sqrt{6}}$. La distance de $A_m$ à $\mathcal{P}$ est donc $d(A_m, \mathcal{P}) = \frac{|m|}{\sqrt{6}}$. On en déduit facilement que $d(A_m, \mathcal{P}) = 1$ si et seulement si $m = \pm\sqrt{6}$.

**Exercise 2.** Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour $M \in \mathcal{P}$, on note $(x, y)$ les coordonnées de $M$ dans le repère $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{D}$ est une droite affine de $\mathcal{P}$, on note $d(M, \mathcal{D})$ la distance de $M$ à la droite $\mathcal{D}$. On notera $d(M, O)$ la distance du point $M$ à l'origine du repère.

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les deux droites affines d'équations cartésiennes respectives $\boldsymbol{4x - 3y - 10 = 0}$ et $\boldsymbol{y = -2}$.

1. On dit que le point $M$ est équidistant à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si $d(M, \mathcal{D}_1) = d(M, \mathcal{D}_2)$. Montrer que le point $M$ de coordonnées $(x, y)$ est équidistant à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $(4x - 3y - 10)^2 = 25(y + 2)^2$. En déduire que l'ensemble des points équidistants à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est la réunion de deux droites $\Delta_1$, $\Delta_2$ et que ces deux droites sont orthogonales.

   Solution: la distance de $M$ à $\mathcal{D}_1$ est donnée par $d(M, \mathcal{D}_1) = \frac{|4x - 3y - 10|}{5}$ et celle de $M$ à $\mathcal{D}_2$ donnée par $d(M\mathcal{D}_2) = |y + 2|$. On en déduit que $d(M, \mathcal{D}_1) = d(M, \mathcal{D}_2)$ si et seulement si $|4x - 3y - 10| = 5|y + 2|$. Les deux membres de cette égalité étant positifs ou nuls, par élevation au carré, cette égalité équivaut à $(4x - 3y - 10)^2 = 25(y + 2)^2$. Un point $M$ de coordonnées $(x, y)$ est donc équidistant à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $(4x - 3y - 10)^2 - (5(y + 2))^2 = 0$, c'est-à-dire $(4x + 2y)(4x - 8y - 20) = 0$, ce qui équivaut à $(2x + y)(x - 2y - 5) = 0$.
   L'ensemble des points équidistants à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est donc la réunion des deux droites $\Delta_1$, $\Delta_2$ d'équations cartésiennes respectives $2x + y = 0$ et $x - 2y - 5 = 0$. On vérifie ensuite facilement que ces deux droites sont orthogonales.

2. On dit que le point $M$ est équidistant à $O$ et $\mathcal{D}_2$ si $d(M, O) = d(M, \mathcal{D}_2)$. Montrer que le point $M$ de coordonnées $(x, y)$ est équidistant à $O$ et $\mathcal{D}_2$ si et seulement si $x^2 + y^2 = (y + 2)^2$.
   En déduire la nature de l'ensemble des points équidistants à $O$ et $\mathcal{D}_2$.

   Solution: on a $d(M, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $d(M, \mathcal{D}_2) = |y + 2|$. Il est alors évident que $d(M, O) = d(M, \mathcal{D}_2)$ si et seulement si $x^2 + y^2 = (y + 2)^2$, ce qui équivaut à $x^2 = 4y + 4$, ou encore $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Ainsi, l'ensemble des points équidistants à $O$ et $\mathcal{D}_2$ est une parabole.

3. Dans un repère orthonormé, tracer le lieu des points équidistants à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et le lieu des points équidistants à $O$ et $\mathcal{D}_2$. D'après votre dessin, combien y a-t-il de points $M$ équidistants à $O$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (c'est-à-dire tels que $d(M, O) = d(M, \mathcal{D}_1) = d(M, \mathcal{D}2)$)?