Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2013 - 2014 - semestre 4 -

Contrôle du 25 mars 2014 (durée: 2 heures) - Barème (à titre indicatif): 2, 6, 6, 8.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Il sera tenu compte de la rédaction dans la notation des copies.

**Exercice 1.** Soient $X$ un espace affine réel de dimension au moins 3, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ quatre droites dans $X$. On suppose que ces quatre droites sont deux à deux sécantes (c'est-à-dire: pour tous indices $i$, $j$ distincts, les droites $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_j$ ont un et un seul point en commun).

Montrer que ces quatre droites sont soit concourantes soit coplanaires.

**Exercice 2.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés d'un espace affine réel $X$ de dimension au moins 2.
À tout point $M$ de $X$ on associe le point $M'$, barycentre des points $A$, $B$, $C$, $M$ affectés respectivement des poids $-1$, 1, 2 et $-3$. On définit ainsi une application $f\colon X \longrightarrow X$;

$$\boldsymbol{f(M) = \mathrm{Bar}((A,-1),(B,1),(C,2),(M,-3))}.$$

1. Quelle est l'image de $C$ par $f$?
2. On note $D$ le barycentre des points $A$, $B$ et $C$ affectés respectivement des poids $-1$, 1 et 2.
   Faire un dessin et y placer les points $A$, $B$, $C$, $D$ et $f(C)$.
3. Montrer que $f$ est une homothétie. Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.
4. Quelle est l'image de la droite $(BC)$ par $f$?
5. Déterminer $f^{-1}(A)$.

**Exercice 3.** Soit $X$ un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$.
On note $I_0$, $I_1$, $I_2$ et $I_3$ les milieux respectifs des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_0]$ et on définit une application affine $f\colon X \longrightarrow X$ en posant $f(A_0) = I_0$, $f(A_1) = I_1$, $f(A_2) = I_2$, $f(A_3) = I_3$.

1. Montrer que $I_0I_1I_2I_3$ est un parallélogramme.
2. Faire un dessin de la configuration et y placer les points $f(I_0)$, $f(I_1)$, $f(I_2)$, $f(I_3)$.
3. Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}\right)$ de $\vec{X}$?
4. Décrire l'ensemble des points fixes de $f$.

**Exercice 4.** Dans un plan affine réel $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ de coordonnées respectives $(2,0)$, $(0,1)$, $(-4,0)$ et $(0,-2)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On note $I$ le milieu de $[AB]$, $J$ le milieu de $[CD]$.

1. Montrer que les droites $(AD)$ et $(BC)$ sont sécantes en un point $E$ dont on précisera les coordonnées.
2. Que peut-on dire des droites $(AB)$ et $(CD)$?
3. Faire un dessin et y placer les points $O$, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $I$, $J$.
4. On note $h_1$ l'homothétie de centre $O$ qui envoie $A$ sur $C$ ($h_1(A) = C$), $h_2$ l'homothétie de centre $E$ qui envoie $C$ sur $B$ ($h_2(C) = B$). On pose $f = h_2 \circ h_1$ et $g = h_1 \circ h_2$.
   a) Quels sont les rapports des homothéties $h_1$ et $h_2$?
   b) Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $g(C)$, $g(D)$.
      En déduire que $I$ est un point fixe de $f$ et $J$ un point fixe de $g$.
   c) Donner une description la plus complète possible de chacune des applications affines $f$ et $g$.