Université de Nice Sophia Antipolis | Licence L2 - Géométrie

Année 2013 - 2014 - semestre 4 -

Contrôle final du 5 juin 2014 (durée: 2 heures) - Barème (à titre indicatif): 10, 6, 6.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Il sera tenu compte de la rédaction dans la notation des copies.

Exercice 1. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,\right)$. On note (x, y) les coordonnées d'un point M par rapport à ce repère. Soient $\mathcal{D}$ la droite affine d'équation $x - 2y + 3 = 0$ et $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

1. Donner les coordonnées (dans le repère $\mathcal{R}$) du point $O' = s_{\mathcal{D}}(O)$.

2. Donner la matrice de la partie linéaire $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}$ de $s_{\mathcal{D}}$ dans la base $\left(\vec{i}\,, \vec{j}\,\right)$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

3. Soient α et β deux nombres réels. On pose $\vec{v} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j}$, on note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ et on pose $f = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$.

   a) Que peut-on dire de la partie linéaire $\vec{f}$ de f?

   b) Si M a pour coordonnées (x, y), donner en fonction de x, y, α, β, les coordonnées (x', y') (dans le repère $\mathcal{R}$) du point $f(M)$.

   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que f admette au moins un point fixe. Que peut-on dire de l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ pour lesquels f admet au moins un point fixe?

   d) Décrire l'ensemble des points fixes de f s'il est non vide.

Exercice 2. Soient X un espace affine euclidien de dimension au moins 2, A et B deux points distincts de X. On note I le milieu du segment $[AB]$ et on pose $R = \|\overrightarrow{IA}\|$.

1. Montrer que pour tout point M de X, on a $< \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} > = \|\overrightarrow{IM}\|^2 - R^2$
   ($< \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} >$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$).

2. On suppose que $\dim(X) = 2$.

   a) Pour k un nombre réel fixé, décrire le lieu Γ_k des points M tels que $< \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} > = k$.

   b) Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de X ne passant pas par A. À tout point N de $\mathcal{D}$ on associe le point N', projeté orthogonal de B sur la droite (AN).
   Quel est le lieu des points N' lorsque N parcourt $\mathcal{D}$?

Exercice 3. Dans un espace affine réel X de dimension au moins 2, on considère trois points non alignés A_1, A_2 et A_3. Soient λ_1, λ_2, λ_3 trois nombres réels non nuls et distincts de 1. On note h_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ l'homothétie de centre A_i et de rapport λ_i, $t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$.

1. Pour quels nombres réels λ_1, λ_2 a-t-on $h_1 \circ h_2 = t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$?

2. On suppose que $h_1 \circ h_2 = t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$. Décrire $h_2 \circ h_1$

3. Montrer que $t_{\overrightarrow{A_1A_2}} \circ h_3$ est une homothétie et préciser comment calculer son centre à partir de A_3, λ_3 et $\overrightarrow{A_1A_2}$.

4. Pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(2, \frac{1}{2}, 2\right)$, décrire $h_1 \circ h_2 \circ h_3$.
