Chapitre 3
Géométrie euclidienne plane

Soit E un plan vectoriel euclidien. Par le choix d'une base orthonormée de E nous pouvons identifier E au plan vectoriel usuel $\mathbb{R}^2$. C'est ce que l'on va faire dans ce chapitre en supposant $\mathbb{R}^2$ muni de sa base dite canonique.

3.1 Angles orientés de vecteurs

Proposition 3.1. *Soient v et v' deux vecteurs unitaires du plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$. Alors il existe une et une seule isométrie positive $\varphi \in SO(\mathbb{R}^2)$ telle que $\varphi(v) = v'$.*

Démonstration. Une base $\mathcal{B} = (e_1,\, e_2)$ (considérée directe) de $\mathbb{R}^2$ étant fixée, on peut se ramener à un simple calcul matriciel.
En effet, si $v = ae_1 + be_2$ (avec $a^2 + b^2 = 1$), posant $w = -be_1 + ae_2$, on construit une base orthonormée directe $(v,\, w)$ de $\mathbb{R}^2$. Posons $v' = a'e_1 + b'e_2$. Alors il existe un unique vecteur unitaire w' tel que $(v',\, w')$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. L'application linéaire $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(v) = v'$ et $\varphi(w) = w'$ est l'unique isométrie positive telle que $\varphi(v) = v'$. □

Autrement dit, étant donnés deux vecteurs unitaires v et v' d'un plan vectoriel euclidien, il existe une et une seule rotation vectorielle qui envoie v sur v'.

Définition 3.2. (angle orienté de vecteurs)

1. *Soient v_1 et v_2 deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$.*
   On appelle angle de v_1 et v_2 l'unique rotation φ telle que $\varphi(v_1) = v_2$.
2. *Soient w_1 et w_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tous les deux non nuls, on appelle angle de w_1 et w_2, l'unique rotation φ telle que $\varphi(\frac{1}{\|w_1\|}w_1) = \frac{1}{\|w_2\|}w_2$.*

L'angle des vecteurs v_1 et v_2 est noté (v_1, v_2).

Proposition 3.3. *Deux couples de vecteurs unitaires (v_1, v_2), (v_1', v_2') définissent le même angle orienté si et seulement s'il existe une rotation ρ telle que $\rho(v_1) = v_1'$ et $\rho(v_2) = v_2'$.*

Démonstration. Soient φ et φ' les uniques rotations telles que $\varphi(v_1) = v_2$ et $\varphi'(v_1') = v_2'$. Soit ρ l'unique rotation telle que $\rho(v_1) = v_1'$. On a $\rho(v_2) = \rho \circ \varphi(v_1)$. Le groupe $SO(2)$ étant commutatif, on obtient $\rho(v_2) = \rho \circ \varphi(v_1) = \varphi \circ \rho(v_1) = \varphi(v_1')$. On en déduit que $\varphi = \varphi'$ si et seulement si $\rho(v_2) = v_2'$. □

Définition 3.4. (mesure de l'angle de deux vecteurs)
Soient v_1 et v_2 deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, φ l'unique rotation telle que $\varphi(v_1) = v_2$.
On sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de φ dans toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ s'écrit $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ce nombre θ, défini à un multiple entier de 2π près est appelé une mesure de l'angle (v_1, v_2).
On écrira souvent $(v_1,\, v_2) = \theta$ ou $(v_1,\, v_2) = \theta \pmod{2\pi}$ pour signifier que θ est une mesure de l'angle orienté (v_1, v_2).

Commentaires: Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède, on a une application $\psi: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow SO(2)$ qui à un couple de vecteurs (v_1, v_2) associe l'unique rotation qui envoie v_1 sur v_2. On voit facilement que cette application est surjective. On construit une relation d'équivalence sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ en posant $(v_1, v_2)\, r\, (v_1', v_2') \Longleftrightarrow \psi(v_1, v_2) = \psi(v_1', v_2')$ (dont on vérifie rapidement qu'elle est réflexive, symétrique et transitive). Ainsi l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sous cette relation est en bijection avec $SO(2)$. Cette bijection permet de transporter la structure de groupe commutatif de $SO(2)$ sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}/r$ (l'ensemble des angles orientés). Plutôt que d'utiliser une notation multiplicative pour la structure de groupe sur l'ensemble des angles orientés, on préfère, via les mesures des angles, utiliser l'addition dans $\mathbb{R}$, en gardant à l'esprit que ces mesures sont définies à un multiple entier de 2π près.
Additionner des angles orientés de vecteurs correspond à composer des rotations vectorielles.

Propriété (relation de Chasles pour l'addition des angles orientés)
Soient v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, (v_1, v_2) l'angle orienté de v_1 et v_2, (v_2, v_3) l'angle orienté de v_2 et v_3. Alors on a $(v_1, v_2) + (v_2, v_3) = (v_1, v_3)$.

Proposition 3.5. *Soient v_1, v_2 deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, (v_1, v_2) l'angle orienté de v_1 et v_2. Supposons que $v_1 = \cos(\theta_1)\, e_1 + \sin(\theta_1) e_2$ et $v_2 = \cos(\theta_2)\, e_1 + \sin(\theta_2) e_2$ (ce qui signifie que $v_i = \varphi_{\theta_i}(e_1)$). Alors l'angle (v_1, v_2) a pour mesure $(\theta_2 - \theta_1) \pmod{2\pi}$.*
Par abus (ou par commodité) on écrit souvent $(v_1, v_2) = \theta_2 - \theta_1 (\operatorname{mod} 2\pi)$.

Démonstration. Il suffit d'écrire la relation de Chasles:
$(v_1, v_2) = (v_1, e_1) + (e_1, v_2)$. □

Proposition 3.6. *Soient v_1 et v_2 deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Si θ est une mesure de l'angle orienté (v_1, v_2), alors on a $<v_1, v_2> = \|v_1\| \times \|v_2\| \times \cos(\theta)$.*

On peut vérifier la formule $<v_1, v_2> = \|v_1\| \times \|v_2\| \times \cos(\theta)$ en utilisant la proposition 3.5 et les formules trigonométriques usuelles ou en procédant comme suit: posons $e_1' = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$; comme $(v_1, v_2) = \theta$, on a $v_2 = \|v_2\|(\cos(\theta) e_1' + \sin(\theta) e_2')$, avec (e_1', e_2'), base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$; d'où le résultat.

Exercice 3.1. Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur unitaire $v = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2$. Donner la matrice S de la réflexion vectorielle par rapport à D dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Réponse: $S = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Je vous laisse le soin de la rédaction.

Exercice 3.2.
Soient v_1, v_2 deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$, que devient l'angle orienté (v_1, v_2) sous l'effet d'une réflexion?

Réponse: Soient D une droite vectorielle, s_D la réflexion par rapport à D.
Alors on a $(s_D(v_1), s_D(v_2)) = -(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. En effet, si w est un vecteur unitaire directeur de D, on sait qu'il existe ρ_1 et ρ_2 des rotations vectorielles telles que $\rho_1(w) = v_1$ et $\rho_2(w) = v_2$. Dans ces conditions, $s_D(v_1) = \rho_1^{-1}(w)$ et $s_D(v_2) = \rho_2^{-1}(w)$.

Ainsi, $(s_D(v_1), s_D(v_2)) = (\rho_1^{-1}(w), \rho_2^{-1}(w))$. La composée $\rho_1 \circ \rho_2$ étant une rotation, on a $(\rho_1^{-1}(w), \rho_2^{-1}(w)) = (\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_1^{-1}(w), \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_2^{-1}(w))$. Le groupe des rotations étant commutatif, on obtient $(\rho_1^{-1}(w), \rho_2^{-1}(w)) = (\rho_2(w), \rho_1(w)) = (v_2, v_1)$. D'où le résultat.

Exercice 3.3.
Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ engendrées respectivement par les vecteurs unitaires $v_1 = \cos(\theta_1) e_1 + \sin(\theta_1) e_2$ et $v_2 = \cos(\theta_2) e_1 + \sin(\theta_2) e_2$.
Donner la matrice de $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, où s_{D_i} est la réflexion d'axe D_i. Décomposer une rotation vectorielle d'angle θ en un produit de réflexions.

Réponse:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta_2) & \sin(2\theta_2) \\ \sin(2\theta_2) & -\cos(2\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta_1) & \sin(2\theta_1) \\ \sin(2\theta_1) & -\cos(2\theta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2(\theta_2 - \theta_1) & -\sin(2(\theta_2 - \theta_1)) \\ \sin(2(\theta_2 - \theta_1)) & \cos(2(\theta_2 - \theta_1)) \end{pmatrix}.$$

Soit ρ une rotation vectorielle d'angle θ. Pour $\theta_1 \in \mathbb{R}$, posons $\theta_2 = \theta_1 + \dfrac{\theta}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Notons D_1 et D_2 les deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ engendrées respectivement par les vecteurs unitaires $v_1 = \cos(\theta_1) e_1 + \sin(\theta_1) e_2$ et $v_2 = \cos(\theta_2) e_1 + \sin(\theta_2) e_2$.
Alors on a $\rho = s_{D_2} \circ s_{D_1}$. On voit bien que la décomposition d'une rotation en produit de réflexions n'est pas unique.