1.5 Applications affines

X et Y sont deux espaces affines non vides sur le corps K, de directions respectives $\vec{X}$ et $\vec{Y}$.

Définition 1.23. *On dit qu'une application $f\colon X \longrightarrow Y$ est affine s'il existe une application linéaire $\varphi\colon \vec{X} \longrightarrow \vec{Y}$ telle que pour tous $A, B \in X$, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$. On dit que φ est l'application linéaire associée à f et on la note $\vec{f}$.*

En utilisant la relation de Chasles on vérifie facilement que la définition précédente est équivalente à la suivante:

Définition 1.24. *Une application $f\colon X \longrightarrow Y$ est affine s'il existe un point $O \in X$ et une application linéaire $\vec{f}\colon \vec{X} \longrightarrow \vec{Y}$ telle que pour tout $M \in X$, $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$.*

Exemple 1.25.

1. Si X et Y sont deux espaces affines, toute application constante $f\colon X \longrightarrow Y$ est affine d'application linéaire associée l'application linéaire nulle.
2. Soient X un espace affine (non vide), $\vec{v} \in \vec{X}$ et $t_{\vec{v}}\colon X \longrightarrow X$ l'application qui à un point $M \in X$ associe le point $M' = t_{\vec{v}}(M)$ vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Cette application est affine. Elle est appelée translation de vecteur $\vec{v}$. L'application linéaire associée à la translation de vecteur $\vec{v}$ est l'application identité $\mathrm{Id}_{\vec{X}}$. Il suffit d'utiliser la règle du parallélogramme pour le vérifier.
3. Dans un espace affine X, soient Z_1 et Z_2 deux sous-espaces affines tels que $\vec{Z_1} \oplus \vec{Z_2} = \vec{X}$. Pour tout point $M \in X$, le sous-espace affine de direction $\vec{Z_2}$ passant par M coupe Z_1 en un point M'. On dit que M' est le projeté de M sur Z_1 parallèlement à Z_2.
   L'application $f\colon X \longrightarrow X$ ainsi définie est une application affine. En effet, soient $A, B \in X$. Comme on a (par hypothèse) $\vec{X} = \vec{Z_1} \oplus \vec{Z_2}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{AB} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, avec $\vec{v_1} \in \vec{Z_1}$ et $\vec{v_2} \in \vec{Z_2}$. Par la relation de Chasles on peut écrire:
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}$. Comme $\overrightarrow{AA'} \in \vec{Z_2}$ et $\overrightarrow{BB'} \in \vec{Z_2}$, on en déduit que $\overrightarrow{A'B'} = \vec{v_1}$. Cette dernière expression est linéaire en le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Soient X un espace affine, ω un point de X et $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.
   Soit $f\colon X \longrightarrow X$ l'application qui à tout $M \in X$ associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\omega M'} = \lambda \overrightarrow{\omega M}$. Alors f est affine, d'application linéaire associée l'homothétie vectorielle $\lambda \mathrm{Id}_{\vec{X}}$. f est l'homothétie de centre ω et de rapport λ.

Proposition 1.26. *Soient $\varphi\colon \vec{X} \longrightarrow \vec{Y}$ une application linéaire, A un point de X, B un point de Y, alors il existe une unique application affine $f\colon X \longrightarrow Y$ telle que $f(A) = B$ et $\vec{f} = \varphi$.*

Démonstration. Existence de f: pour tout $M \in X$, il existe un unique point $N \in Y$ tel que $\overrightarrow{BN} = \varphi(\overrightarrow{AM})$. On pose alors $f(M) = N$. L'application f ainsi définie est alors par définition affine puisque φ est une application linéaire: $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{AM})$. L'unicité d'une telle application est évidente. □

Proposition 1.27. *Soient X et Y deux espaces affines non vides. X étant muni d'un repère affine $\mathcal{R}_X = (A_0, A_1, \cdots, A_n)$, on se donne un système de $(n+1)$ points $(N_0, N_1, \cdots, N_n)$ de Y. Alors il existe une unique application affine $f\colon X \longrightarrow Y$ telle que $f(A_i) = N_i$.*

Démonstration. Existence: on pose pour commencer, $f(A_0) = N_0$. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, posons $e_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$. Le système $(e_1, \cdots, e_n)$ est alors une base de $\vec{X}$. Soit maintenant $\varphi\colon \vec{X} \longrightarrow \vec{Y}$ l'unique application linéaire définie par $\varphi(e_i) = \overrightarrow{N_0 N_i}$. D'après la proposition 1.26, il existe une unique application affine $f\colon X \longrightarrow Y$ telle que $f(A_0) = N_0$ et $\vec{f} = \varphi$.
Par construction on a $f(A_i) = N_i$. □

Expression d'une application affine dans des repères cartésiens.

Soient X et Y deux espaces affines sur le corps K, munis respectivement des repères cartésiens $\mathcal{R}_X=(A_0,e_1,\cdots,e_n)$, $\mathcal{R}_Y=(B_0,v_1,\cdots,v_m)$, $f\colon X\longrightarrow Y$ une application affine.

Pour tout $M\in X$, on a $\overrightarrow{A_0M}=\sum_{j=1}^{j=n}x_je_j$, $x_j\in K$ (écriture unique). f étant affine, on a $\overrightarrow{f(A_0)f(M)}=\vec{f}(\overrightarrow{A_0M})=\sum_{j=1}^{j=n}x_j\vec{f}(e_j)$, ou encore, en utilisant la relation de Chasles,

$\overrightarrow{f(A_0)B_0}+\overrightarrow{B_0f(M)}=\sum_{j=1}^{j=n}x_j\vec{f}(e_j)$. On obtient ainsi $\overrightarrow{B_0f(M)}=\sum_{j=1}^{j=n}x_j\vec{f}(e_j)+\overrightarrow{B_0f(A_0)}$.

Notons T la matrice de l'application linéaire $\vec{f}$ dans les bases respectives $(e_1,\cdots,e_n)$, $(v_1,\cdots,v_m)$ de $\vec{X}$ et $\vec{Y}$. Si $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$ est le vecteur colonne des coordonnées de $\overrightarrow{B_0f(M)}$ et $\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ celui des coordonnées de $\overrightarrow{B_0f(A_0)}$, alors on a l'écriture matricielle suivante pour f dans les repères $\mathcal{R}_X$ et $\mathcal{R}_Y$: $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$; $y_i=\sum_{j=1}^{j=n}t_{ij}x_j+b_i$.

Image, image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine

Proposition 1.28. *Soient X, Y deux espaces affines, $f\colon X\longrightarrow Y$ une application affine.*

1. *Si Z est sous-espace affine de X, alors l'image de Z par f ($f(Z)$) est un sous-espace affine de Y, de direction $\vec{f}(\vec{Z})$.*
2. *Si W est un sous-espace affine de Y, alors l'image réciproque de W ($f^{-1}(W)=\{x\in X\,/\,f(x)\in W\}$) est un sous-espace affine de X, de direction $\vec{f}^{-1}(\vec{W})$.*

Exemple 1.29.

- Soient X un espace affine, $h_{\omega,\lambda}$ une homothétie de centre ω et de rapport λ ($\lambda\neq 0$). Pour tout sous-espace affine non vide Z de X, $h_{w,\lambda}(Z)$ est un sous-espace affine de X, parallèle à Z.
- Soient X, Y deux espaces affines, f: $X\longrightarrow Y$ une application affine. Étant donné un point $B\in Y$, $f^{-1}(B)=\{M\in X\,/\,f(M)=B\}$ est un sous-espace affine de X, de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f})$.

Composition des applications affines

En utilisant la définition d'une application affine, on peut montrer les propositions suivantes:

Proposition 1.30. *Soient X,Y, Z des espaces affines, $f\colon X\longrightarrow Y$, $g\colon Y\longrightarrow Z$ des applications affines, alors $g\circ f$ est affine d'application linéaire associée $\vec{g}\circ\vec{f}$.*

Proposition 1.31. *Soient X, Y deux espaces affines, $f\colon X\longrightarrow Y$ une application affine bijective. Alors $\vec{f}$: $\vec{X}\longrightarrow\vec{Y}$ est bijective et la bijection réciproque f^{-1}: $Y\longrightarrow X$ est affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f^{-1}}=\vec{f}^{-1}$.*

Proposition 1.32. *Soit X un espace affine. L'ensemble des bijections affines de X dans lui-même a une structure de groupe (appelé groupe affine) pour la loi $\circ$ de composition des applications. Ce groupe est noté $GA(X)$.*