Résumé de la séance du 3 mars 2015

1.8 Notion de sous-ensembles convexes

Définition 1.48.
Soient X un espace affine sur $\mathbb{R}$, non vide, A et B deux points de X. Le segment défini par A et B, noté $[AB]$ est l'ensemble des points $M \in X$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ pour $\lambda \in [0,1]$.

Remarque 1.49.
Si X est un espace affine réel non vide, A, B deux points de X, alors le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de poids λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$.
En effet, $M \in [AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in [0,1]$.
Cela équivaut à $(1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Définition 1.50. *Soit X un espace affine réel. Un sous-ensemble non vide Z de X est dit convexe si pour deux points quelconques A, B de X, le segment $[AB]$ est contenu dans X.*

A partir de la définition on montre facilement la proposition suivante:

Proposition 1.51. *Soit X un espace affine réel. Toute intersection non vide de sous-ensembles convexes de X est convexe.*

Exemple 1.52.

1. Tout sous-espace affine non vide Z d'un espace affine réel X est convexe
2. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes
3. Demi-plans ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^2$
4. L'intérieur d'un triangle, d'un carré, d'un rectangle
5. Les disques fermés ou ouverts dans le plan euclidien usuel

Proposition 1.53. *Soient X un espace affine réel, Z un sous-ensemble non vide convexe de X. Si $(A_1,\lambda_1),\cdots,(A_s,\lambda_s)$ est un système de points pondérés de Z tel que $\lambda_i \geqslant 0$ (quel que soit i) et $\lambda_1+\cdots+\lambda_s \neq 0$, alors $\mathrm{Bar}((A_1,\lambda_1),\cdots,(A_s,\lambda_s)) \in Z$.*

La preuve de cette proposition se conduit facilement par récurrence sur le nombre de points du système pondéré.

Définition 1.54. *Étant donné un sous-ensemble non vide Γ d'un espace affine réel X, on appelle enveloppe convexe de Γ, le plus petit sous-ensemble convexe de X contenant Γ.*

En utilisant essentiellement l'associativité du barycentre, on peut prouver la proposition suivante:

Proposition 1.55. *Soient X un espace affine réel, Γ un sous-ensemble non vide de X.
Alors l'enveloppe convexe de Γ est constitué des barycentres
$\mathrm{Bar}((A_1,\lambda_1),\cdots,(A_s,\lambda_s))$, où $A_i \in \Gamma$ et $\lambda_i \geqslant 0$.*

Comment se comportent les convexes par transformations affines?

Proposition 1.56. *Soient X, Y deux espaces affines réels, Z un sous-ensemble convexe de X, W un sous-ensemble convexe de Y et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application affine. Alors $f(Z)$ est un convexe de Y et $f^{-1}(W)$ (l'image réciproque de W) est un convexe de X.*

Démonstration. Exercice: utiliser la définition d'un sous-ensemble convexe et le fait qu'une application affine conserve les barycentres. □

Corollaire 1.57. *Soient X, Y deux espaces affines réels, $f\colon X \longrightarrow Y$ une application affine.
Alors pour tous points $A, B \in X$, l'image du segment $[AB]$ par f est le segment $[f(A)f(B)]$.*