Symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan: formules utiles

Soient X un espace affine euclidien, Z un sous-espace affine de X. Pour $M \in X$, notons M' le projeté orthogonal de M sur Z, M'' le symétrique orthogonal de M par rapport à Z.

Fixons une origine de X en un point $O \in Z$. Nous avons alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$, avec $\overrightarrow{OM'} \in \vec{Z}$ et $\overrightarrow{M'M} \in \vec{Z}^{\perp}$. Ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{M'M}$.
Par définition de la symétrie orthogonale par rapport à Z nous avons $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{M'M}$, ou encore $\overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{0}$. On en déduit l'expression $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{M'M}$.

Supposons à présent que $Z = H$ est un hyperplan de X ($\dim(H) = \dim(X) - 1$, avec $\dim(X) > 1$). Dans ce cas $\vec{H}^{\perp}$ est une droite vectorielle $\vec{D}$ de $\vec{X}$. Si $\vec{w}$ est un vecteur de norme 1 qui engendre $\vec{D}$, alors on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{M'M} = \lambda\vec{w}$.
Comme $<\overrightarrow{OM'}, \vec{w}> = 0$, nous en déduisons que $\lambda = <\overrightarrow{OM}, \vec{w}>$. En conséquence nous obtenons $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - <\overrightarrow{OM}, \vec{w}>\vec{w}$ et $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} - 2<\overrightarrow{OM}, \vec{w}>\vec{w}$.

Reste à noter qu'à partir de tout vecteur directeur non nul $\vec{v}$ qui engendre $\vec{D}$ nous pouvons produire un vecteur unitaire $\vec{w}$ en posant $\vec{w} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$.
On en déduit, pour un vecteur directeur quelconque $\vec{v}$ de $\vec{D}$, les formules suivantes:

- $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \dfrac{<\overrightarrow{OM}, \vec{v}>}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$
- $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} - 2\dfrac{<\overrightarrow{OM}, \vec{v}>}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$

Cas concret: X est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (A_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\mathcal{P}$ est un plan de X définie par l'équation $ax + by + cz + d = 0$ $((a, b, c,) \neq (0, 0, 0))$. $\vec{\mathcal{P}}^{\perp}$ est la droite vectoriel engendré par le vecteur $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
On a $\|\vec{v}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Si on se fixe un point O dans $\mathcal{P}$, pour $M \in X$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$, on déduit facilement les coordonnées de M' et M'' dans le même repère en utilisant les formules précédentes.

Noter que $\mathcal{P}$ étant donné par une équation, on peut, aussi calculer M' en utilisant une équation paramétrique de la normale à $\mathcal{P}$ par M. M'' est déterminé par le fait que M' est le milieu du segment $[MM'']$.

Remarque 2.13. Étant donnés A et A' deux points distincts d'un espace affine euclidien X, il existe une et une seule réflexion affine s telle que $s(A) = A'$. L'hyperplan invariant de la réflexion est l'hyperplan médiateur du segment $[AA']$: hyperplan passant par le milieu de $[AA']$ et dont la direction est orthogonale à $\overrightarrow{AA'}$.

Proposition 2.14. (coordonnées du projeté orthogonal) *Soient X un espace affine euclidien de dimension $n > 1$, $Z \subset X$ un sous-espace affine de dimension m $(0 < m < n)$. On note p_Z la projection orthogonale sur Z. Supposons que $(O, e_1, \cdots, e_m)$ est un repère orthonormé de Z.*

Alors pour tout $M \in X$, posant $M' = p_Z(M)$, on a $\overrightarrow{OM'} = \sum_{i=1}^{i=m} <\overrightarrow{OM}, e_i> e_i$.

Autrement dit, dans le repère orthonormé $(O, e_1, \cdots, e_m)$, M' a pour coordonnées $(x'_1, \cdots, x'_m)$, avec $x'_i = <\overrightarrow{OM}, e_i>$.

Démonstration. Prenons O comme origine de l'espace affine euclidien X. Pour tout point $M \in X$, $\overrightarrow{OM}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{OM} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in \vec{Z}$ et $\vec{v}_2 \in \vec{Z}^{\perp}$. Si $M' = p_Z(M)$, on a $\vec{v}_1 = \overrightarrow{OM'}$. Soient $(x'_1, \cdots, x'_m)$ les coordonnées de M' dans le repère orthonormé $(O, e_1, \cdots, e_m)$ de Z. On a $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \vec{v}_2 = \sum_{i=1}^{i=m} x'_i e_i$. $(e_1, \cdots, e_m)$ étant une base orthonormée de $\vec{Z}$, on a $x'_i = <\overrightarrow{OM'}, e_i>$.
Comme par définition $<\vec{v}_2, e_i> = 0$, on en déduit immédiatement $x'_i = <\overrightarrow{OM}, e_i>$.
D'où le résultat. □

2.3 Isométries vectorielles et affines

2.3.1 Quelques résultats généraux

Définition 2.15. (isométrie vectorielle) *Soient E et F des espaces vectoriels euclidiens. On appelle isométrie (vectorielle) de E dans F, toute application linéaire $\varphi: E \longrightarrow F$ telle que*

$$\text{pour tout } \vec{v} \in E, \|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

On notera tout de suite qu'une isométrie (vectorielle) est injective.

Théorème 2.16. (conservation du produit scalaire) *Si E et F sont des espaces vectoriels euclidiens, alors φ: $E \longrightarrow F$ est une isométrie si et seulement si φ conserve le produit scalaire: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, <\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})> = <\vec{u}, \vec{v}>$.*

Ce théorème se démontre en utilisant la forme polaire du produit scalaire:
$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, <\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})> = \frac{1}{2}(\|\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})\|^2 - \|\varphi(\vec{u})\|^2 - \|\varphi(\vec{v})\|^2)$

Si $E = F$, on vérifie facilement que la composée de deux isométries est une isométrie et que l'inverse d'une isométrie est une isométrie. Ainsi, l'ensemble des isométries (vectorielles) de E a une structure de groupe pour la loi de composition des isométries. Ce groupe est noté $O(E)$ et s'appelle groupe orthogonal de E. C'est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ (groupe des applications linéaires bijectives de E dans E).

Définition 2.17. (isométrie affine) *Soient X et Y deux espaces affines euclidiens, on appelle isométrie affine de X dans Y, toute application affine $f: X \longrightarrow Y$ qui conserve les distances euclidiennes, c'est-à-dire telle que pour tout $(A, B) \in X^2$, $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.*

Lorsque $X = Y$, l'ensemble des isométries affines de X, noté souvent $\mathrm{Is}(X)$ a une structure de groupe pour la loi de composition des applications affines. C'est un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}(X)$. Une application affine $f: X \longrightarrow X$ est une isométrie si et seulement si $\vec{f} \in O(\vec{X})$.

Exemple 2.18.

1. Les symétries orthogonales (vectorielles ou affines) sont des isométries.
2. Si X est un espace affine euclidien, toute translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur $\vec{v} \in \vec{X}$ est une isométrie.

Théorème 2.19. (caractérisation des isométries vectorielles) *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et φ: $E \longrightarrow E$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *φ est une isométrie*
2. *Il existe une base orthonormée de E dont l'image par φ est une base orthonormée de E*
3. *L'image de toute base orthonormée de E par φ est une base orthonormée de E.*

Note 2.20. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n, φ: $E \longrightarrow E$ une isométrie. Une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E étant donnée, si S est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, alors les vecteurs colonnes de la matrice S forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel). Autrement dit, si I_n est la matrice identité $n \times n$, on a ${}^tS \times S = I_n$. Une telle matrice est dite orthogonale. Les propriétés du déterminant nous permettent d'affirmer que $\det(S) = \pm 1$.

Nous admettrons que l'on peut définir le déterminant $\det(\varphi)$ de l'endomorphisme φ de E, indépendamment de la base de l'espace vectoriel euclidien E choisie. Les isométries vectorielles dont le déterminant vaut $+1$ sont appelées isométries positives. C'est un sous-groupe du groupe orthogonal $O(E)$, noté $O^+(E)$ ou $SO(E)$ (groupe spécial orthogonal).