Résumé de la séance du 31 mars 2015

2.3.2 Décomposition d'une isométrie en produit de réflexions

Théorème 2.21. (décomposition d'une isométrie vectorielle en produit de réflexions) *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n, $\varphi\colon E \longrightarrow E$ une isométrie vectorielle. Alors on peut décomposer φ en un produit de r réflexions vectorielles, avec $r \leqslant n$. Autrement dit, si $\varphi \neq \mathrm{Id}_E$, il existe $H_1, \cdots, H_r$ des hyperplans vectoriels de E (avec $r \leqslant n$) tels que $\varphi = s_{H_r} \circ \cdots \circ s_{H_1}$ (où s_{H_i} est la réflexion par rapport à H_i).*

Ce théorème se prouve par récurrence sur la dimension n ($n \geqslant 1$) de E.
Nous allons l'expliciter pour $n = 1$ et $n = 2$.

Si $\dim(E) = 1$, prenons un vecteur unitaire e_1 de E.
L'isométrie φ est entièrement déterminée par la donnée de $\varphi(e_1)$. Comme $\|\varphi(e_1)\| = \|e_1\|$, on a $\varphi(e_1) = \pm e_1$. Si $\varphi(e_1) = e_1$, φ est l'identité et (par convention) $r = 0$. Si $\varphi(e_1) = -e_1$, $r = 1$ (symétrie centrale). Le théorème est vérifié.

Si $\dim(E) = 2$.

- Supposons qu'il existe un vecteur non nul v tel que $\varphi(v) = v$. Soit alors $e_1 = \frac{1}{\|v\|} v$. e_1 est un vecteur unitaire et on a $\varphi(e_1) = e_1$. Notons D_1 la droite vectorielle engendrée par e_1. Soit alors D_2 la droite vectorielle orthogonale à D_1. Comme φ conserve le produit scalaire, on a $f(D_2) = D_2$. Prenons alors e_2 un vecteur unitaire directeur de D_2. φ étant une isométrie, on a alors $\varphi(e_2) = \pm e_2$.
  Si $\varphi(e_2) = e_2$, alors $\varphi = \mathrm{Id}_E$. Si $\varphi(e_2) = -e_2$ et alors $\varphi = s_{D_1}$. Le théorème est vérifié.
- Supposons qu'il n'existe pas de vecteur fixé par φ. Prenons alors un vecteur non nul quelconque v. On a $\varphi(v) \neq v$. Soit D_2 la droite vectorielle orthogonale au vecteur $\varphi(v) - v$ (si $\varphi(v) \neq -v$, alors $(\varphi(v) + v)$ est un vecteur directeur de D_2:
  $\varphi(v) = \frac{1}{2}(\varphi(v) + v) + \frac{1}{2}(\varphi(v) - v))$. La transformation $\psi = s_{D_2} \circ \varphi$ est une isométrie et on a $\psi(v) = v$. D'après le point précédent, il existe une droite vectorielle D_1 telle que $\psi = s_{D_1}$. De l'égalité $s_{D_1} = s_{D_2} \circ \varphi$ on déduit en composant à gauche avec s_{D_2}, que $s_{D_2} \circ s_{D_1} = \varphi$.
  Ceci prouve le théorème en dimension 2.
  La démonstration en dimension supérieure se fait de manière analogue.

Remarque 2.22. (le cas de la dimension 3) Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\varphi\colon E \longrightarrow E$ une isométrie vectorielle.

1. **Fait:** φ admet 1 ou -1 pour valeur propre. En effet, le polynôme caractéristique de φ ($P_\varphi(x) = \det(\varphi - x\,\mathrm{Id}_E)$ étant de degré 3 et à coefficients réels, il admet au moins une racine réelle. On peut s'en convaincre au moins de deux façons:
   a) En utilisant le théorème de D'Alembert-Gauss: "tout polynôme non constant de degré n à une variable à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet admet n racines (comptées avec multiplicités) dans $\mathbb{C}$". $P_\varphi(x)$ étant à coefficients réels, si r est racine de $P_\varphi(x)$, il en est de même de son conjugué $\bar{r}$. $P_\varphi(x)$ étant de degré 3 (degré impaire), il admet au moins une racine réelle.
   b) La fonction polynomiale réelle $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P_\varphi(x)$ est continue, et $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
   Le théorème des valeurs intermédiaires dit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) = 0$.

   Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de φ de vecteur propre associé v, on a
   $\varphi(v) = \lambda v$. v étant non nul et φ conservant la norme, on en déduit $|\lambda| = 1$, donc $\lambda = \pm 1$.
2. Soit $e_1 \in E$ un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda = \pm 1$ de φ.
   Si D est la droite vectorielle engendrée par e_1, on a $\varphi(D) = D$ (droite stable par φ). $D^\perp = V$ est un plan vectoriel de E et on a $E = D \oplus V$.
   Comme φ conserve le produit scalaire, nous avons $\varphi(V) = V$. La restriction $\varphi_{|V}$ de φ à V est une isométrie. Si (e_2, e_3) est une base orthonormée de V, alors (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E et par rapport à cette base, la matrice de φ est de la forme $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \multirow{2}{*}{$\boxed{S}$} \\ 0 & \end{pmatrix}$ où $S \in O(2)$.

Soit E un plan vectoriel euclidien. En se fixant une base de E, nous pouvons identifier E tout simplement à $\mathbb{R}^2$.
Considérons donc le plan vectoriel euclidien usuel muni de sa base dite canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Ce choix de base correspond à une orientation (que l'on considère positive, ou directe) de $\mathbb{R}^2$. Soit φ: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie vectorielle dont la matrice dans la base canonique est $S = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Nous avons donc ${}^tS \times S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que les coefficients de la matrice S vérifient le système suivant: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$.

De la seconde équation nous tirons $(c, d) = \lambda(-b, a)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Les deux autres équations nous imposent alors $\lambda^2 = 1$. La matrice S s'écrit alors sous l'une des deux formes suivantes: $S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$. Dans le premier cas on a une isométrie positive tandis que dans le second on a une isométrie négative. Le groupe $SO(2)$ est décrit par l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.
Les éléments de $SO(2) = O^+(2)$ sont appelés rotations vectorielles.

On peut par simple calcul matriciel vérifier la proposition suivante:

Proposition 2.23. *$SO(2)$ est un groupe commutatif.*

On déduit immédiatement de cette proposition que **la matrice d'une rotation vectorielle plane ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie**. En effet soient $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormée directe et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si S' est la matrice de la rotation φ dans la base $\mathcal{B}'$, on a $S' = P^{-1}SP$. Comme $P, S \in SO(2)$ et que $SO(2)$ est commutatif, on obtient $S' = S$. On vérifie que si la base $\mathcal{B}'$ est indirecte, alors $S' = S^{-1}$ (en effet, si $\mathcal{B}'$ est indirecte, on a $P^{-1} = P$, SP est négative, donc $(SP)^2 = I_2$).

Notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. $\mathbb{U}$ est un groupe commutatif pour le produit usuel des nombres complexes.

Proposition 2.24. *L'application h: $\mathbb{U} \longrightarrow SO(2)$ qui à un nombre complexe $z = a + ib$ de module 1 associe la matrice $S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes commutatifs.*

Le théorème (admis) qui suit nous permet de mesurer les angles des rotations:

Théorème 2.25. *L'application μ: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$, définie à l'aide de l'exponentielle complexe par $\mu(\theta) = e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes, surjectif et périodique de période 2π.*

En écrivant $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, on a $(h \circ \mu)(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On en déduit alors que toute matrice $S \in O(2)$ s'écrit
$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = \pm 1$.

Théorème 2.26. (isométries vectorielles en dimension 2) *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, φ: $E \longrightarrow E$ une isométrie vectorielle. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice S de φ s'écrit:*

1. $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ *si φ est positive*
2. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *si φ est négative.*

Théorème 2.27. (isométries vectorielles en dimension 3) *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $\varphi\colon E \longrightarrow E$ une isométrie vectorielle. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice S de φ s'écrit:*

1. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ *si φ est positive. C'est la matrice d'une rotation autour d'un axe. Ici on ne peut parler d'angle de la rotation que si l'on a au préalable orienté son axe (sous-espace propre des vecteurs fixes).*
2. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *ou* $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ *si φ est négative.*

Version affine du théorème 2.21.

Théorème 2.28. (décomposition d'une isométrie affine en produit de réflexions) *Soient X un espace affine euclidien de dimension n, $f\colon X \longrightarrow X$ une isométrie. Alors f peut se décomposer en un produit de r réflexions affines avec $r \leqslant n+1$. Autrement dit, on peut trouver $H_1, \cdots, H_r$ ($r \leqslant n+1$) des hyperplans affines de X tels que $s_{H_r} \circ \cdots \circ s_{H_1} = f$.*

Idée de la preuve: si f admet un point fixe O, on vectorialise X en O et on se ramène au cas vectoriel. Si f n'admet pas de point fixe, on considère un point quelconque $A \in X$, on note H l'hyperplan médiateur du segment $[A f(A)]$. A est alors un point fixe de l'isométrie $g = s_H \circ f$. Comme g peut être écrite comme le produit d'au plus n réflexions, on en déduit que $f = s_H \circ g$ peut être écrite comme le produit d'au plus $(n+1)$ réflexions.

On a un théorème d'unicité de décomposition des isométries affines, utile pour ramener l'étude d'une isométrie affine à celle d'une isométrie admettant au moins un point fixe.

Rappelons que l'on montre assez facilement (voir feuille de TD n°3) que pour toute application affine $g\colon X \longrightarrow X$, si l'ensemble $\mathcal{G}$ des points fixes de g n'est pas vide alors c'est un sous-espace affine de X de direction $\vec{\mathcal{G}} = \ker(\vec{g} - \mathrm{Id}_{\vec{X}})$.

Nous admettrons le théorème suivant:

Théorème 2.29. (forme réduite d'une isométrie affine)
*Soient X un espace affine euclidien de dimension n, $f\colon X \longrightarrow X$ une isométrie affine.
Alors il existe une isométrie g de X et une translation $t_{\vec{v}}$ telles que:*

1. *l'ensemble $\mathcal{G}$ des points fixes de g est non vide*
2. $\vec{v} \in \vec{\mathcal{G}}$
3. $t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}} = f$
4. *un tel couple $(g, \vec{v})$ vérifiant les propriétés 2. et 3. est unique.*