Université de Nice Sophia Antipolis

Licence L2 - Géométrie

Année 2014-2015 (Semestre 4)

Feuille de TD 4

Exercice 1. (condition d'alignement de trois points et coordonnées barycentriques)
$\mathcal{P}$ est un plan affine réel muni d'un repère affine (A, B, C).

1. Soient M_1, M_2, M_3 trois points de coordonnées barycentriques respectives $(x_i,\ y_i,\ z_i)_{(1 \leqslant i \leqslant 3)}$ dans le repère affine (A, B, C).
   Rappelons que M_i a pour coordonnées barycentriques (x_i, y_i, z_i) dans le repère (A, B, C) si et seulement si $\boldsymbol{x_i \overrightarrow{M_iA} + y_i \overrightarrow{M_iB} + z_i \overrightarrow{M_iC} = \vec{0}}$ et $\boldsymbol{x_i + y_i + z_i = 1}$.

   a) Quelles sont les coordonnées de M_i dans le repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

   b) Montrer que les trois points M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ est de rang au plus 2.

2. Soit M un point de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans le repère (A, B, C).
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur x, y et z pour que:

   a) M soit sur la droite AB.

   b) M soit sur la médiane du triangle ABC issue du sommet C.

Exercice 2. (jonction de deux convexes)
Soient X un espace affine réel, Z_1, Z_2 deux sous-ensembles non vides de X. On appelle jonction de Z_1 et Z_2 le sous-ensmble de X noté $J(Z_1, Z_2)$ défini par $J(Z_1, Z_2) = \{M \in X \,/\, \exists\, (M_1, M_2) \in Z_1 \times Z_2, M \in [M_1M_2]\}$.
Montrer que si Z_1 et Z_2 sont convexes, alors $J(Z_1, Z_2)$ est convexe.

Exercice 3. (composer deux homothéties / translations)
Soient X un espace affine réel de dimension au moins 2, A et B deux points de X, α et β deux réels non nuls tels que $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 1$. On note h_A l'homothétie de centre A et de rapport α, h_B l'homothétie de centre B et de rapport β.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que $h_B \circ h_A$ (resp. $h_A \circ h_B$) soit une translation puis exprimer en fonction de α, β et $\overrightarrow{AB}$, le vecteur associé à cette translation.

2. On suppose que $h_B \circ h_A$ n'est pas une translation. Montrer que $h_B \circ h_A$ admet un et un seul point fixe ω et que l'on a $(1 - \alpha\beta)\overrightarrow{A\omega} = (1 - \beta)\overrightarrow{AB}$.
   En déduire que w est le barycentre des points A et B affectés respectivement des poids $\beta(1 - \alpha)$ et $(1 - \beta)$.
   Qu'en est-il de $h_A \circ h_B$?

3. On se donne un vecteur non nul $\vec{v} \in \overrightarrow{X}$ et on note f la translation de vecteur $\vec{v}$. Montrer que $h_A \circ f$ (resp. $f \circ h_A$) est une homothétie et préciser comment calculer son centre à partir de A, α et $\vec{v}$.

Exercice 4. (utiliser un produit scalaire pour établir une bijection entre un faisceau de droites planes et un cercle)

Soient A et B deux points distincts dans le plan affine euclidien usuel $\mathbb{R}^2$.
On note I le milieu du segment $[AB]$.

1. Pour un point M du plan, montrer que l'on a $\|\overrightarrow{IM}\|^2 = \|\overrightarrow{IA}\|^2 \Longleftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0$.
   ($\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$).
   Indication: écrire $\|\overrightarrow{IM}\|^2 = \langle \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BM} \rangle$ et utiliser les propriétés du produit scalaire.

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A. Montrer que le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

3. Montrer que l'application qui à une droite $\mathcal{D}$ associe le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{D}$ est une bijection de l'ensemble des droites passant par A sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 5. (construire un repère orthonormé et calculer les coordonnées d'un projeté orthogonal)

Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ on considère le plan affine $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y - 2z + 1 = 0$.
Munir $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ et pour un point $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer les coordonnées (x_1, x_2) (dans le repère $\mathcal{R}$) du projeté orthogonal M' de M sur $\mathcal{P}$.

Exercice 6. (distance entre un point et une droite dans le plan)
Dans le plan euclidien usuel muni d'un repère orthonormé, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0))$. Pour un point M de coordonnées (x_0, y_0), calculer la distance de M à $\mathcal{D}$ (en fonction de a, b, c, x_0 et y_0).

Exercice 7. (distance entre un point et un plan dans l'espace)
Adapter l'énoncé de l'exercice 3 et donner une formule calculant la distance entre un point M et un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace euclidien usuel.

Exercice 8. (ensemble de points équidistants à trois points non alignés fixés)
X est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X dans le repère $\mathcal{R}$.
Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(0, 0, 3)$, $(3, 0, 0)$ et $(0, -3, 0)$.
On note $\mathcal{P}$ le plan engendré par A, B et C.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2. Montrer que le point ω de coordonnées $(1, -1, 1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ et que ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. Pour $M \in X$, si d_M désigne la distance de M au plan $\mathcal{P}$, il existe un unique point $N \in \mathcal{P}$ tel que $d_M = \|\overrightarrow{MN}\|$. Le point M étant donné, expliquer comment on trouve le point N (on ne demande pas de faire des calculs).

4. Quelle est la distance du point O (origine du repère) au plan $\mathcal{P}$?

5. On dit qu'un point $M \in X$ est équidistant aux points A, B et C si $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$.

   a) Montrer que si $\overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$, alors M est équidistant à A, B et C.

   b) Montrer que si M est équidistant à A, B et C, alors $\overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$.

   c) Que peut-on dire de l'ensemble des points équidistants à A, B et C? Justifiez votre réponse.

Exercice 9. (centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre d'un triangle)

1. Dans le plan euclidien usuel, montrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

2. Toujours dans le plan euclidien usuel, on considère un triangle équilatéral ABC et un triangle quelconque $A'B'C'$.
   Montrer qu'il existe une application affine et une seule, transformant A, B, C en A', B', C'.
   Déduire de ce qui précède que les trois médianes du triangle $A'B'C'$ sont concourantes.

3. Montrer qu'une homothétie (de rapport non nul) transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales.

4. Quelle est l'image du point de concours des trois médiatrices de $A'B'C'$ par l'homothétie de centre le point de concours des trois médianes et de rapport -2 ?
