Exercices à rédiger et à rendre le 16 février 2009

dans le cadre des devoirs-maisons

Exercice 8. (DM) - Objectif de l'exercice: faire la différence entre "être disjoints" et "être parallèles" -

X est un espace affine de dimension 3.

1. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines non parallèles de X. Que peut-on dire de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$? Justifiez votre réponse.

2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines disjoints de X. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

3. L'énoncé suivant est-il vrai? Justifiez votre réponse.
   "Si deux sous-espaces affines de même dimension dans X sont disjoints, alors ils sont parallèles".

Exercice 9. (DM) - Objectifs de l'exercice: calculer l'équation d'un plan affine, calculer une intersection, savoir projeter sur un plan parallèlement à une droite -

Soit X un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (pensez à l'espace usuel $\mathbb{R}^3$). Pour $M \in X$, on note (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.

Soient ω le point de coodonnées $(0,\ 0,\ 1)$, $\mathcal{P} \subset X$ le plan affine passant par ω et de direction $\vec{\mathcal{P}}$ engendré par les deux vecteurs $e_1 = \vec{i} - \vec{k}$ et $e_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2. Donner un vecteur directeur de la droite AB et une équation paramétrique de celle-ci.

3. Calculer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite AB.

4. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ dans le repère $\mathcal{R}$. La parallèle à AB par M_0 coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point M_0'. Quelles sont les coordonnées de M_0' ?

5. Soit O' le point de coordonnées $(2, 3, 2)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

   a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\vec{X}$.

   b) Soit $\pi_{\mathcal{P}}$ la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à AB. Décrire matriciellement $\pi_{\mathcal{P}}$ dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.