Université de Nice Sophia Antipolis

Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 (Semestre 4)

Corrigé du premier devoir-maison

Les énoncés sont en bleu, les commentaires sont en mauve

Exercice 1. **(DM)** - Objectif de l'exercice: faire la différence entre "être disjoints" et "être parallèles" -

X est un espace affine de dimension 3.

1. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines non parallèles de X. Que peut-on dire de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$? Justifiez votre réponse.

   Solution: On a $\dim(\vec{X}) = 3$. Les plans vectoriels $\vec{\mathcal{P}_1}$ et $\vec{\mathcal{P}_2}$ étant distincts, on a $\vec{X} = \vec{\mathcal{P}_1} + \vec{\mathcal{P}_2}$. Cette dernière égalité permet de prouver que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est non vide. En effet, si A est un point du plan $\mathcal{P}_1$ et B un point du plan $\mathcal{P}_2$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit: $\overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, avec $\vec{v}_1 \in \vec{\mathcal{P}_1}$ et $\vec{v}_2 \in \vec{\mathcal{P}_2}$. Soit N_1 l'unique point de $\mathcal{P}_1$ tel que $\overrightarrow{AN_1} = \vec{v}_1$. En écrivant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN_1} + \overrightarrow{N_1B}$, on déduit que $\overrightarrow{N_1B} = \vec{v}_2$, donc $N_1 \in \mathcal{P}_2$. Ainsi $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est un sous-espace affine de direction $\vec{\mathcal{P}_1} \cap \vec{\mathcal{P}_2}$ qui est de dimension 1. $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est donc une droite affine.

   Ici vous auriez pu invoquer le théorème vu en cours qui dit que pour deux sous-espaces affines Z_1, Z_2 d'un espace affine X, si on a $\vec{Z_1} + \vec{Z_2} = \vec{X}$, alors $Z_1 \cap Z_2$ est un sous-espace affine non vide de X, de dimension $\dim(Z_1) + \dim(Z_2) - \dim(X)$.

2. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines disjoints de X. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

   Solution: Par contraposition, le résultat découle de la question précédente:
   "$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non parallèles implique $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ non vide".

3. L'énoncé suivant est-il vrai? Justifiez votre réponse.
   "Si deux sous-espaces affines de même dimension dans X sont disjoints, alors ils sont parallèles".

   Solution: Cet énoncé est faux. Il suffit de prendre deux droites non coplanaires dans X. Si par exemple (A, B, C, D) est un repère affine de X, les deux droites AB et CD (qui ont même dimension 1) sont disjointes mais ne sont pas parallèles.

Vous pouvez revoir si besoin, le paragraphe 6 du cours (troisième séance) traitant des positions relatives de sous-espaces affines.

Exercice 2. **(DM)** - Objectifs de l'exercice: calculer l'équation d'un plan affine, calculer une intersection, savoir projeter sur un plan parallèlement à une droite -

Soit X un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (pensez à l'espace usuel $\mathbb{R}^3$). Pour $M \in X$, on note (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$.

Soient ω le point de coodonnées $(0,\ 0,\ 1)$, $\mathcal{P} \subset X$ le plan affine passant par ω et de direction $\vec{\mathcal{P}}$ engendré par les deux vecteurs $e_1 = \vec{i} - \vec{k}$ et $e_2 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

   Solution: Un point $M \in X$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement le système $(\overrightarrow{\omega M}, e_1, e_2)$ est lié. Ce qui équivaut à $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 2 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
   Un simple développement du déterminant donne $x - y + z - 1 = 0$ comme équation du plan $\mathcal{P}$.

2. Donner un vecteur directeur de la droite AB et une équation paramétrique de celle-ci.

   Solution: Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{X}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. On en déduit facilement une équation paramétrique de la droite AB: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite AB.

   Solution: D'après la question précédente, tout point de AB a pour coordonnées $(t, 1+t, t)$, avec $t \in \mathbb{R}$. Comme le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x - y + z - 1 = 0$, calculer $\mathcal{P} \cap AB$ revient à résoudre en t, l'équation $t - (1+t) + t - 1 = 0$. On trouve facilement $t = 2$ et on déduit que $\mathcal{P} \cap AB$ est le point N de coordonnées $(2, 3, 2)$.

4. Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ dans le repère $\mathcal{R}$. La parallèle à AB par M_0 coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point M_0'. Quelles sont les coordonnées de M_0' ?

   Solution: Une équation paramétrique de la parallèle à AB par M_0 est $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
   Trouvez l'intersection de cette droite avec $\mathcal{P}$ revient à résoudre l'équation
   $(x_0 + t) - (y_0 + t) + (z_0 + t) - 1 = 0$, où l'inconnue est t. On trouve alors $t = -x_0 + y_0 - z_0 + 1$ et on en déduit que le point M_0' a pour coordonnées
   $(x_0', y_0', z_0') = (y_0 - z_0 + 1, -x_0 + 2y_0 - z_0 + 1, -x_0 + y_0 + 1)$.

   On remarquera au passage que l'on a matriciellement,
   $\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   L'application linéaire associée à la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à AB a donc pour matrice
   $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{X}$.

5. Soit O' le point de coordonnées $(2, 3, 2)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

   a) Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\vec{X}$.

      Solution: $\vec{X}$ étant de dimension 3, il suffit de vérifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.
      Ce que l'on peut faire par exemple en s'assurant que le déterminant suivant est non nul:
      $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

b) Soit $\pi_{\mathcal{P}}$ la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à AB. Décrire matriciellement $\pi_{\mathcal{P}}$ dans le nouveau repère $\mathcal{R}'=(O',\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Solution: On remarque pour commencer que $O'\in\mathcal{P}$ (question 3)). Ainsi, $\pi_{\mathcal{P}}(O')=O'$.
Si A_1, A_2 et A_3 sont les points de X tels que $\overrightarrow{O'A_1}=\vec{u}$, $\overrightarrow{O'A_2}=\vec{v}$, $\overrightarrow{O'A_3}=\vec{w}$, alors on a $\vec{\pi_{\mathcal{P}}}(\vec{u})=\overrightarrow{O'\pi_{\mathcal{P}}(A_1)}$, $\vec{\pi_{\mathcal{P}}}(\vec{v})=\overrightarrow{O'\pi_{\mathcal{P}}(A_2)}$, $\vec{\pi_{\mathcal{P}}}(\vec{w})=\overrightarrow{O'\pi_{\mathcal{P}}(A_3)}$. Il ne reste plus qu'à calculer les projetés des points A_1, A_2 et A_3 qui ont respectivement pour coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, $(3,4,2)$, $(2,4,3)$ et $(3,4,3)$. On utilise alors les calculs faits dans la question 4) pour constater que $\pi_{\mathcal{P}}(A_1)=A_1$, $\pi_{\mathcal{P}}(A_2)=A_2$ et $\pi_{\mathcal{P}}(A_3)=O'$.
Ainsi, si on note (x',y',z') les coordonnées d'un point $M\in X$ dans le repère $\mathcal{R}'$, alors les coordonnées (x'',y'',z'') de $\pi_{\mathcal{P}}(M)$ dans le même repère $\mathcal{R}'$ sont données par
$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

On note ainsi que la matrice de $\vec{\pi_{\mathcal{P}}}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de $\vec{X}$ est $S'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice faisant passer de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de $\vec{X}$, on a $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $S'=P^{-1}SP$, S étant la matrice de $\vec{\pi_{\mathcal{P}}}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{X}$.
