Corrigé succinct du devoir-maison n° 2

Exercice (un exemple d'isométrie affine)

X est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $f\colon X\longrightarrow X$ l'application affine qui à un point M de coordonnées (x,y,z) dans le repère $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées (x',y',z') dans le même repère, tel que:

$$(x',y',z')=\left(\frac{x-2y+2z+4}{3},\frac{-2x+y+2z+4}{3},\frac{2x+2y+z-4}{3}\right).$$

On note $\vec{f}$ la partie linéaire de f.

1. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{X}$.

   Solution:
   On a $\overrightarrow{f(O)f(M)}=\frac{x-2y+2z}{3}\vec{i}+\frac{-2x+2y+2z}{3}\vec{j}+\frac{2x+2y+z}{3}\vec{k}$.
   L'application $\vec{f}$ est définie par $(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\mapsto\overrightarrow{f(O)f(M)}$.
   La matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{X}$ est donc $S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

2. Montrer que f est une isométrie.

   Solution:
   On vérifie facilement que la matrice S calculée dans la question 1 est orthogonale:
   ${}^tS\times S=S\times{}^tS=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant orthonormée, cela prouve que f est une isométrie.

3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fixes de f ($\mathcal{F}=\{M\in X\,/\,f(M)=M\}$).

   a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un plan affine de X.

   Solution:
   Chercher les points fixes de f revient à résoudre le système

   $$\begin{cases}x-2y+2z+4=3x\\-2x+y+2z+4=3y\\2x+2y+z-4=3z\end{cases}.$$

   Ce système se réduit à l'unique équation $x+y-z-2=0$.
   Ainsi, M est un point fixe de f si et seulement les coordonnées (x,y,z) de M vérifient l'équation $x+y-z-2=0$, qui est bien l'équation d'un plan affine.

   b) On note $\mathcal{P}$ le plan constitué des points fixes de f. Donner une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$ et la compléter ensuite en une base orthonormée de $\vec{X}$.

   Solution:
   D'après la question précédente, un vecteur $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ de $\vec{X}$ appartient à $\vec{\mathcal{P}}$ si et seulement si $x+y-z=0$. Une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$ est donnée par exemple par (e_1,e_2) où $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{k})$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k})$.
   Considérant l'équation de $\vec{\mathcal{P}}$, on voit que le vecteur $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ est orthogonal à $\vec{\mathcal{P}}$. Il suffit donc de poser $e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ pour compléter (e_1,e_2) en une base orthonormée de $\vec{X}$.

4. Avec les résultats et les notations des questions précédentes, soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de $\vec{X}$ telle que (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$.

   a) Sachant que l'application f considérée ici est une isométrie, que $\vec{f}(e_1) = e_1$ et $\vec{f}(e_2) = e_2$, que vaut $\vec{f}(e_3)$? (On ne demande pas d'expliciter les vecteurs e_1, e_2, e_3). Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\vec{X}$.

      Solution:
      D'après la matrice S de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, calculée dans la question 1, on a $\vec{f} \neq \mathrm{Id}_{\vec{X}}$. On en déduit que f étant une isométrie et vérifiant $\vec{f}(e_1) = e_1$, $\vec{f}(e_2) = e_2$, on doit avoir $\vec{f}(e_3) = -e_3$. La matrice de $\vec{f}$ dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\vec{X}$ est donc $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   b) Choisir un point O' dans $\mathcal{P}$. Dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O', e_1, e_2, e_3)$, on note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un point M de X et (x_1', x_2', x_3') celles de $M' = f(M)$. Donner (x_1', x_2', x_3') en fonction de (x_1, x_2, x_3).

      Solution:
      Rappelons que $\mathcal{P}$ a pour équation $x + y - z - 2 = 0$. Nous pouvons prendre par exemple pour O', le point de coordonnées $(1, 1, 0)$. Comme $f(O') = O'$, On a $\overrightarrow{f(O')f(M)} = \overrightarrow{O'f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{O'M})$.
      Sachant que $\overrightarrow{O'M} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et tenant compte de la question 4a) ci-dessus, on obtient $\overrightarrow{O'f(M)} = x_1 e_1 + x_2 e_2 - x_3 e_3$. Ainsi $(x_1', x_2', x_3') = (x_1, x_2, -x_3)$.

   c) **(hors barème)** Soient α, β et γ trois nombres réels.
      On pose $\vec{v} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ et on note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ ($t_{\vec{v}}: X \longrightarrow X$).

      i. Montrer que $t_{\vec{v}}$ et f commutent ($t_{\vec{v}} \circ f = f \circ t_{\vec{v}}$) si et seulement si $\gamma = 0$.

         Solution:
         D'après la question précédente, si M a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans le repère $\mathcal{R}' = (O', e_1, e_2, e_3)$, alors $M' = (t_{\vec{v}} \circ f)(M)$ a pour coordonnées $(x_1 + \alpha, x_2 + \beta, -x_3 + \gamma)$ et $M'' = (f \circ t_{\vec{v}})(M)$ a pour coordonnées $(x_1 + \alpha, x_2 + \beta, -x_3 - \gamma)$ dans le même repère. On en déduit que $t_{\vec{v}}$ et f commutent si et seulement si on a $\gamma = -\gamma$, c'est-à-dire $\gamma = 0$.

      ii. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β, γ) pour que l'ensemble des points fixes de $t_{\vec{v}} \circ f$ soit non vide.

         Solution:
         Nous savons que si M a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans le repère $\mathcal{R}'$, alors $M' = (t_{\vec{v}} \circ f)(M)$ a pour coordonnées $(x_1 + \alpha, x_2 + \beta, -x_3 + \gamma)$ dans le même repère. Une condition nécessaire et suffisante pour que f admette au moins un point fixe est que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
         Dans le cas où cette condition "$\alpha = 0$ et $\beta = 0$" est remplie, l'ensemble des points fixes de f est le plan affine d'équation $x_3 = \frac{\gamma}{2}$.
