Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

---

Corrigé de l'interrogation écrite du 9 mars 2009 (durée: 45mn)

---

Les énoncés sont en bleu et les commentaires en mauve.

---

**Exercice 1.**
$X$ est un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.
On note $(x,\ y,\ z)$ les coordonnées d'un point $M$ de $X$. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ les quatre points de coordonnées respectives $(0,2,1)$, $(2,1,0)$, $(1,3,-1)$ et $(-1,-1,2)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. Pourquoi?

   Solution: Les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. Pour le voir, on vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires: on a $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\,$, $\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\,$. $\overrightarrow{AB}$ étant non nul, on constate facilement qu'on ne peut trouver un nombre réel $\lambda$ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$. En effet $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\begin{cases} 2\lambda=1 \\ -\lambda=1 \\ -\lambda=-2 \end{cases}$, système qui n'admet pas de solution en $\lambda$.

2. Donner (par rapport au repère $\mathcal{R}$) une équation cartésienne du plan engendré par $A$, $B$ et $C$.

   Solution: Un point $M$ de coordonnées $(x,y,z)$ dans le repère $\mathcal{R}$ appartient au plan engendré par $A$, $B$ et $C$ si et seulement si le système $(\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,)$ est lié. Comme on est en dimension 3, en exprimant les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de $\vec{X}$, cela équivaut à dire que le déterminant suivant est nul: $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & 1 \\ z-1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.
   Un développement par rapport à la première colonne (par exemple) donne
   $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & 1 \\ z-1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=3x+3(y-2)+3(z-1)$. On en déduit que le plan engendré par $A$, $B$ et $C$ admet pour équation cartésienne $x+y+z-3=0$.

   On aurait pu aussi procéder comme suit:

   i. Un plan affine dans $X$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

   ii. En évaluant l'expression $ax+by+cz+d$ successivement sur les coordonnées des points $A$, $B$ et $C$, on obtient que le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ $((a,b,c)\neq(0,0,0))$ passe par $A$, $B$ et $C$ si et seulement si $(a,\ b,\ c,\ d)$ est solution du système linéaire $\begin{cases} 2b+c+d=0 \\ 2a+b+d=0 \\ a+3b-c+d=0 \end{cases}$.
   En résolvant ce système (*je vous invite à le faire*), on trouve que $a=b=c$ et $d=-3a$.
   En donnant à $a$ une valeur non nulle (par exemple $a=1$) on trouve $x+y+z-3=0$ comme équation cartésienne du plan engendré par $A$, $B$ et $C$.

3. Les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont-ils coplanaires? Justifiez votre réponse.

   Solution: D'après la question précédente, le plan engendré par $A$, $B$ et $C$ admet pour équation $x+y+z=3$. Le point $D$ a pour coordonnées $(-1,-1,2)$.
   On voit tout de suite que $-1-1+2\neq 3$, donc $A$, $B$, $C$ et $D$ ne sont pas coplanaires.

   Nous aurions pu aussi, en calculant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de $\vec{X}$, vérifier que le système $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est libre.

4. On considère le vecteur $\vec{u}\in\vec{X}$ défini par $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

   a) Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il à la direction du plan engendré par $A$, $B$ et $C$?
   Justifiez votre réponse.

   Solution: D'après la question 2., le plan engendré par $A$, $B$ et $C$ admet pour équation cartésienne $x+y+z=3$. Si on note $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de $\vec{X}$, on a $\vec{v}$ appartient à la direction du plan engendré par $A$, $B$ et $C$ si et seulement si $\alpha+\beta+\gamma=0$ (équation homogène associée à l'équation cartésienne du plan). Ici, le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ a pour coordonnées (1,1,1) (qui ne vérifie pas l'équation homogène $\alpha+\beta+\gamma=0$). Le vecteur $\vec{u}$ n'appartient donc pas à la direction du plan engendré par $A$, $B$ et $C$.

   Notes:

   - Rappel (utile):
     Notons $\mathcal{P}$ le plan engendré par $A$, $B$ et $C$ et fixons un point $M_0$ dans ce plan.
     Si $(x_0,y_0,z_0)$ sont les coordonnées de $M_0$ dans le repère cartésien $\mathcal{R}$, nous avons $x_0+y_0+z_0=3$. On a alors $\vec{\mathcal{P}}=\left\{\overrightarrow{M_0M}\right\}_{M\in\mathcal{P}}$.
     Compte tenu de l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, un point $M\in X$ de coordonnées $(x,y,z)$ dans le même repère $\mathcal{R}$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si
     $(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)=0$ (du fait que $x_0+y_0+z_0=3$).
     $(\alpha,\beta,\gamma)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ désignant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ dans la base $(\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}\,)$ de $\vec{X}$, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ est solution de l'équation homogène associée à l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}\in\vec{\mathcal{P}}$.

   - Soit $D$ le point de $X$ ayant pour coordonnées $(1,1,1)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On vérifie facilement que $D\in\mathcal{P}$. Le vecteur $\vec{u}$ n'est autre chose que le vecteur $\overrightarrow{OD}$. $\overrightarrow{OD}$ ne peut appartenir à la direction de $\mathcal{P}$ car $D\in\mathcal{P}$ mais $O\notin\mathcal{P}$.

   - Pour montrer que le vecteur $\vec{u}$ n'appartient pas à la direction du plan engendré par $A$, $B$, et $C$ nous aurions pu choisir de prouver que le système $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \vec{u})$ est libre. Cela peut se vérifier en calculant par exemple un déterminant dont on s'assure qu'il est non nul.

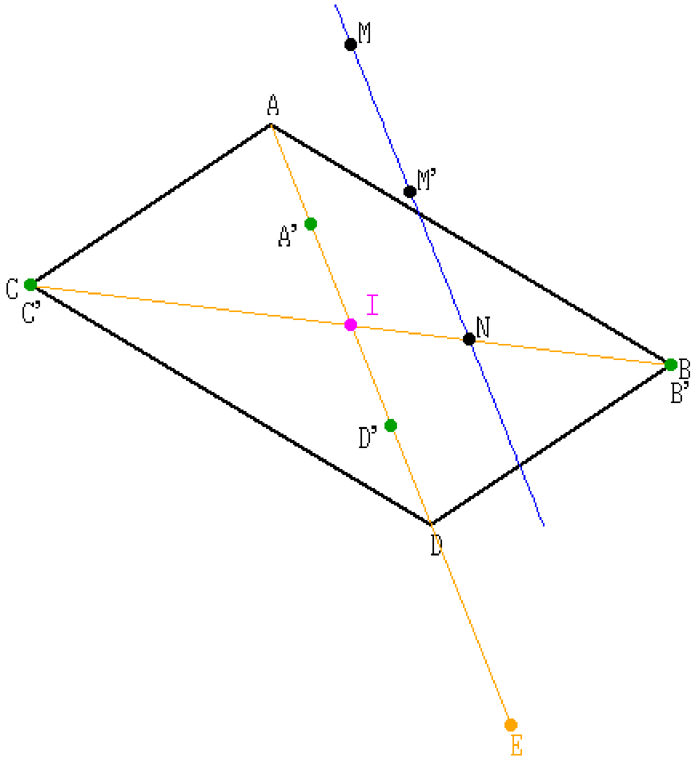
   b) On note $\mathcal{P}$ le plan engendré par $A$, $B$ et $C$. Soit $\mathcal{P}'$ un plan passant par le point $D$ et tel que $\vec{u}\in\vec{\mathcal{P}'}$. Que peut-on dire de l'intersection $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$?
   Justifiez votre réponse.

   Solution: D'après la question a) ci-dessus, $\vec{u}\notin\vec{\mathcal{P}}$. Comme $\dim(\vec{X})=3$, on en déduit que $\vec{X}=\vec{\mathcal{P}}+\vec{\mathcal{P}'}$, donc $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est une droite affine de direction $\vec{\mathcal{P}}\cap\vec{\mathcal{P}'}$.
   Résultat déjà vu et commenté dnas le premier devoir-maison.

**Exercice 2.**
Soient $\mathcal{P}$ un plan affine réel, $ABDC$ un parallélogramme non applati de $\mathcal{P}$ (rappel: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$).
On définit une application $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de la manière suivante:
pour $M \in \mathcal{P}$, la parallèle à la droite $AD$ par $M$ coupe la droite $BC$ en $N$. On note $M'$ le milieu du segment $[MN]$ et on pose $f(M) = M'$.
L'application $f$ ainsi définie est affine bijective (on ne demande pas de le prouver).

1. Faire un dessin et placer les points $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$.
   Adjoindre un bref commentaire explicatif à votre dessin.

   Solution: Par la définition même de $f$, on constate toute de suite que $f(B) = B$ et $f(C) = C$. $ABDC$, étant un parallélogramme, notons $I$ le milieu commun aux segments $[AD]$ et $[BC]$. $f(A)$ est alors le milieu de $[AI]$ et $f(D)$ est le milieu de $[DI]$. D'où le dessin ci-dessous:




2. Placer dans le dessin du 1), le point $E$ tel que $f(E) = D$.
   Expliquez brièvement comment on trouve le point $E$.

   Solution: Si $f(E) = D$, par définition de $f$, $E$ est sur la parallèle à $AD$ par $D$ (c'est-à-dire $AD$). $I$ (milieu commun aux segments $[AD]$ et $[BC]$) est lintersection de $AD$ et $BC$. Par définition, $D$ est le milieu de $[IE]$. La construction de $E$ s'en déduit facilement.

3. On munit à présent le plan $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et on note $(x, y)$ les coordonnées d'un point $M$ dans ce repère.

   a) Donner (par rapport au repère $\mathcal{R}$) une équation cartésienne de la droite $BC$.

   Solution: $B$ et $C$ ont respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$. $\overrightarrow{BC}$ qui est vecteur directeur de $BC$ a donc pour coordonnées $(-1, 1)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$. Un point $M$ de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ appartient à $BC$ si et seulement si $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC})$ est lié. Ce qui s'écrit $\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$.
   Conclusion: la droite $BC$ admet pour équation cartésienne $x + y = 1$.

   b) Donner (en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$) un vecteur directeur de la droite $AD$.

   Solution: Il suffit d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ (par la relation de Chasles). Comme on sait que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ (car $ABDC$ est un parallélogramme), on obtient $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(1, 1)$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

   c) Soit $M_0$ un point ayant pour coordonnées $(x_0, y_0)$ dans le repère $\mathcal{R}$, donner en fonction de $(x_0, y_0)$, les coordonnées de $f(M_0)$ dans ce même repère.

   Solution: En utilisant le b) ci-dessus, on trouve que la parallèle à $AD$ par $M_0$ admet pour équation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Cette droite coupe $BC$ lorsque $t$ est solution de l'équation $x_0 + y_0 + 2t = 1$ (voir l'équation de $BC$ dans la question a)). On trouve que $x_0 + y_0 + 2t = 1 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{2}(1 - x_0 - y_0)$. La parallèle à $AD$ par $M_0$ coupe donc $BC$ en le point $N_0$ de coordonnées $(\frac{x_0 - y_0 + 1}{2}, \frac{-x_0 + y_0 + 1}{2})$.
   On en déduit que le point $M_0' = f(M_0)$, milieu de $[M_0 N_0]$ a pour coordonnées $(x_0', y_0') = (\frac{3x_0 - y_0 + 1}{4}, \frac{-x_0 + 3y_0 + 1}{4})$.

   Cette dernière égalité s'écrit matriciellement:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. **(hors barème)** Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$?

   Solution: Nous avons par définition, $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ et $\vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)}$. Nous savons déjà (question 1.) que $f(B) = B$, $f(C) = C$ et que $f(A)$ est le milieu de $[AI]$.
   On a alors $\overrightarrow{Af(A)} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$. $I$ étant le milieu de $[AD]$, on en déduit que $\overrightarrow{Af(A)} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
   A la question 3.b) nous avons vu que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{Af(A)} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   Il ne reste plus qu'à utiliser la relation de Chasles pour voir que:

   - $\overrightarrow{f(A)f(B)} = -\overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{Af(B)} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

   - $\overrightarrow{f(A)f(C)} = -\overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{Af(C)} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

   Conclusion: la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$ est $S = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   A mettre en relation avec la matrice mise en évidence dans la question 3.

---