Université de Nice Sophia Antipolis Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Corrigé de l'interrogation écrite du 27 avril 2009

Exercice 1. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit m un nombre réel, différent de 0 et 2 ($m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$). On considère A_m, B_m et C les trois points du plan dont les coordonnées respectives sont $(m, 0)$, $\left(0, \frac{m}{2}\right)$ et $(0, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{D}_m$ la droite A_mB_m.

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}_m$ admet $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ pour vecteur directeur.

   Solution:
   Le vecteur $\overrightarrow{A_mB_m}$ a pour coordonnées $\left(-m, \frac{m}{2}\right) = -\frac{m}{2}(2, -1)$.
   On en déduit que $\overrightarrow{A_mB_m} = -\frac{m}{2}\vec{v}$. Le fait que $m \neq 0$ nous assure alors que $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_m$.

2. Donner (par rapport au repère $\mathcal{R}$) une équation cartésienne de la droite orthogonale à $\mathcal{D}_m$ et passant par C.

   Solution:
   $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ étant un vecteur directeur de $\mathcal{D}_m$, on en déduit que le vecteur $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$ est un vecteur orthogonal à la directeur de $\mathcal{D}_m$. Un point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite Δ, orthogonale à $\mathcal{D}_m$ par C si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.
   Ce qui équivaut à: $\begin{vmatrix} x & 1 \\ (y-1) & 2 \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $2x - y + 1 = 0$.

3. Donner les coordonnées du projeté orthogonal de C sur $\mathcal{D}_m$ et calculer la distance du point C à la droite $\mathcal{D}_m$. Pour quelles valeurs de m cette distance est-elle égale à 1?

   Solution:
   Il nous suffit de calculer les coordonnées de l'intersection $\mathcal{D}_m$ avec la droite Δ, orthogonale à $\mathcal{D}_m$ et passant par C. $\mathcal{D}_m$ admet pour équation $\begin{vmatrix} 2 & (x-m) \\ -1 & y \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $x + 2y - m = 0$.
   Compte tenu du résulat de la question 2. ci-dessus, il ne nous reste plus qu'à résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - m = 0 \end{cases}$.
   On en déduit facilement $x = \frac{m-2}{5}$, $y = 1 + \frac{2m-4}{5}$. Le projeté orthogonal C' de C sur $\mathcal{D}_m$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{m-2}{5}, 1 + \frac{2m-4}{5}\right)$. La distance de C à $\mathcal{D}_m$ est $\left\|\overrightarrow{CC'}\right\| = \frac{|m-2|}{\sqrt{5}}$.
   Cette distance est égale à 1 lorsque $|m-2| = \sqrt{5}$, c'est-à-dire $m = 2 - \sqrt{5}$ ou $m = 2 + \sqrt{5}$.

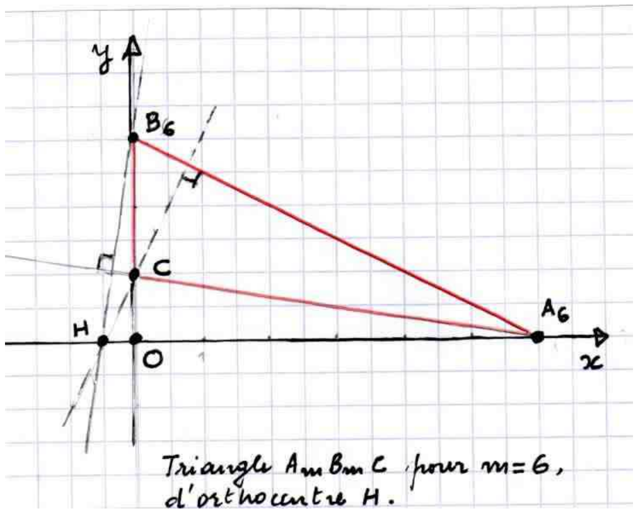
4. Donner les coordonnées de l'orthocentre du triangle A_mB_mC. Qu'observe-t-on? (On rappelle qu'une hauteur dans un triangle non aplati est une droite orthogonale à un côté et passant par le sommet opposé à ce côté. Les trois hauteurs d'un triangle non aplati se rencontrent en un point H appelé l'orthocentre du triangle).

   Solution:
   La hauteur issue de C est la droite Δ qui a pour équation $2x - y + 1 = 0$.
   La hauteur issue de A_m a pour équation $y = 0$. L'orthocentre du triangle A_mB_mC a donc pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. On observe que ce point est indépendant de m, ce qui signifie que tous les triangles A_mB_mC ont le même orthocentre H.

5. On suppose que $m=6$.

Faire un dessin et tracer les 3 hauteurs du triangle A_mB_mC.

Solution:



6. De tous les tiangles A_mB_mC, un seul est rectangle. Lequel?

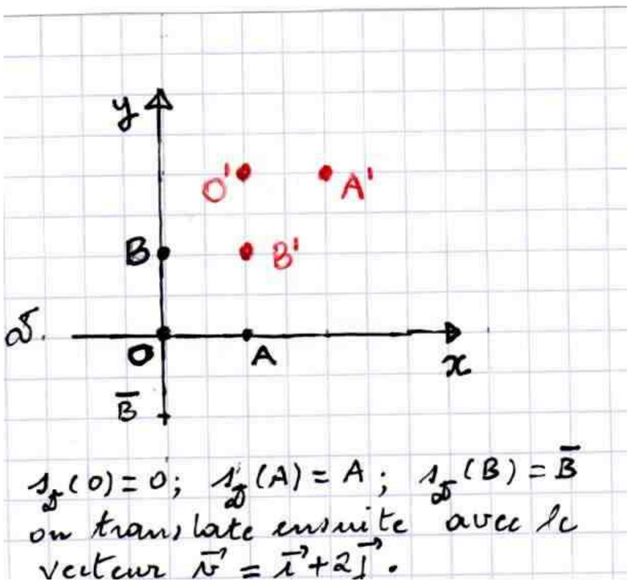
Solution:
Un triangle est rectangle si et seulement si son orthocentre est confondu avec un de ses sommets. Aucun des sommets B_m, C ne se trouve sur la droite d'équation $y=0$. On en déduit, en utilisant la question 4, que A_mB_mC est rectangle lorsque A_m est confondu avec l'orthocentre du triangle, c'est-à-dire lorsque $m=-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.
On note (x,y) les coordonnées d'un point par rapport à ce repère.
Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=0$ et $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

1. Soit $\vec{v}$ donné par $\vec{v}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$. On note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ et on pose $f=t_{\vec{v}}\circ s_{\mathcal{D}}$.

   a) Faire un dessin et placer les points O, A, B, $f(O)$, $f(A)$ et $f(B)$ où O est l'origine du repère, A le point de coordonnées $(1,0)$ et B le point de coordonnées $(0,1)$.

   Solution:



b) Si le point M a pour coordonnées (x, y), donner en fonction de x et y les coordonnées du point $M' = f(M)$. f admet-elle des points fixes?

Solution:
Si M a pour coordonnées (x, y), alors $s_{\mathcal{D}}(M)$ a pour coordonnées $(x, -y)$. On en déduit facilement que $M' = f(M)$ a pour coordonnées $(x', y') = (x+1, -y+2)$.

f n'admet pas de point fixe car le système $\begin{cases} x+1 = x \\ -y+2 = y \end{cases}$ n'admet pas de solution.

2. Soient α et β deux nombres réels. On pose $\vec{w} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, on note $t_{\vec{w}}$ la translation de vecteur $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ et on pose $g = t_{\vec{w}} \circ s_{\mathcal{D}}$.

a) Si le point M a pour coordonnées (x, y), donner en fonction de x, y, α et β, les coordonnées du point $M' = g(M)$.

Solution:
Si M a pour coordonnées (x, y), alors $s_{\mathcal{D}}(M)$ a pour coordonnées $(x, -y)$.
En appliquant à $s_{\mathcal{D}}(M)$ la translation de vecteur $\vec{w}$, on trouve facilement que le point $M' = g(M)$ a pour coordonnées $(x', y') = (x+\alpha, -y+\beta)$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que g admette au moins un point fixe.

Solution:
g admet au moins un point fixe si et seulement si le système $\begin{cases} x+\alpha = x \\ -y+\beta = y \end{cases}$ où les inconnues sont x et y admet au moins une solution. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution est $\alpha = 0$.

c) Décrire l'ensemble des points fixes de g lorsqu'il est non vide.

Solution:
Dans le 2b) on a vu qu g admet au moins un point fixe si et seulement si $\alpha = 0$. Ainsi, lorsque $\alpha = 0$, l'ensemble des points de g est non vide. C'est la droite affine d'équation $y = \dfrac{\beta}{2}$ (droite parallèle à $\mathcal{D}$).

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que $t_{\vec{w}}$ et $s_{\mathcal{D}}$ commutent.

Solution:
On a vu en 2a) que si M a pour coordonnées (x, y), alors $M' = t_{\vec{w}} \circ s_{\mathcal{D}}(M)$ a pour coordonnées $(x+\alpha, -y+\beta)$. En appliquant la translation de vecteur $\vec{w}$ au point, on voit que $t_{\vec{w}}(M)$ a pour coordonnées $(x+\alpha, -y+\beta)$. Appliquant enfin $s_{\mathcal{D}}$ à $t_{\vec{w}}(M)$, on obtient un point M'' qui a pour coordonnées $(x+\alpha, -y-\beta)$. $t_{\vec{w}}$ et $s_{\mathcal{D}}$ commutent si et seulement si pour tout point M on a $M' = M''$. Conclusion: $t_{\vec{w}}$ et $s_{\mathcal{D}}$ commutent si et seulement si $\beta = -\beta$, ce qui équivaut à $\beta = 0$.