Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Corrigé du partiel du 23 mars 2009

Exercice 1. X est un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note (x,y,z) les coordonnées d'un point M de X.

Soient A le point de coordonnées $(1,0,-1)$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vecteurs définis par $\vec{v}_1=-\vec{i}$, $\vec{v}_2=\vec{j}+3\vec{k}$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x-y+z-1=0$, on note $\mathcal{P}'$ le plan passant par A et de direction $\vec{\mathcal{P}}'$ engendrée par $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$.

1. Dans chacun des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, donner trois points non alignés.

   Solution: Pour le plan $\mathcal{P}$ on peut par exemple, en l'intersectant avec les axes (Ox), (Oy), (Oz) trouver les trois points M_1, M_2 et M_3 de coordonnées respectives $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$ et $(0,0,1)$. Il est immédiat que ces trois points ne sont pas allignés. Pour le plan $\mathcal{P}'$ on peut prendre les points N_1, N_2, N_3 définis par $\overrightarrow{AN_1}=\vec{v}_1$ et $\overrightarrow{AN_2}=\vec{v}_2$ et $N_3=A$. N_1 et N_2 ont respectivement pour coordonnées $(0,0,-1)$ et $(1,1,2)$. Le système $(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ étant libre, les points N_1, N_2 et A ne sont pas alignés.

2. Donner une base de $\vec{\mathcal{P}}\cap\vec{\mathcal{P}}'$.

   Solution: Tout vecteur $\vec{v}\in\vec{\mathcal{P}}'$ s'écrit $\vec{v}=x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2$ avec $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{X}$, $\vec{v}$ a pour coordonnées $(-x_1,x_2,3x_2)$. $\vec{v}$ appartient à $\vec{\mathcal{P}}$ si et seulement si $(-x_1,x_2,3x_2)$ vérifie l'équation homogène associée à l'équation de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire si et seulement si $-x_1-x_2+3x_2=0$. Ce qui signifie $x_1=2x_2$. Ainsi $\vec{v}\in\vec{\mathcal{P}}\cap\vec{\mathcal{P}}'$ si et seulement si $\vec{v}$ a pour coordonnées $(-2x_2,x_2,3x_2)$ $(x_2\in\mathbb{R})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{X}$.
   On en déduit que $\vec{\mathcal{P}}\cap\vec{\mathcal{P}}'$ est de dimension 1, engendré par le vecteur $\vec{w}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

3. Montrer que $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est non vide en donnant explicitement un point dans cette intersection. Décrire $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$.

   Solution: Tout point N de $\mathcal{P}'$ est caractérisé par $\overrightarrow{AN}=x_1\vec{v}_1+x_2\vec{v}_2$ ($(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$). Dans le repère que l'on s'est fixé, un tel point N a pour coordonnées et $(-x_1+1,x_2,3x_2-1)$. Ainsi, N (qui appartient à $\mathcal{P}'$) est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $(-x_1+1,x_2,3x_2-1)$ vérifie l'équation du plan $\mathcal{P}$. Cela donne $(-x_1+1)-x_2+(3x_2-1)-1=0$, ou encore $-x_1+2x_2-1=0$, c'est-à-dire $x_1=2x_2-1$. En posant $x_2=0$ par exemple, on trouve le point B de coordonnées $(2,0,-1)$. $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est donc la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{w}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ (trouvé dans la question 2. ci-dessus).

4. Soit D_m la droite affine passant par le point A et de direction engendrée par le vecteur $\vec{u}_m$ défini par $\vec{u}_m=m\vec{v}_1+\vec{v}_2$, où m est un paramètre parcourant $\mathbb{N}$.

   a) Décrire (en fonction du paramètre m) l'intersection de D_m avec le plan $\mathcal{P}$.

   Solution: Une équation paramétrique de D_m est donnée par
   $$(x,y,z)=(1-mt,t,-1+3t).$$
   Décrire $D_m\cap\mathcal{P}$ revient à résoudre l'équation $(1-mt)-t+(-1+3t)-1=0$ où l'inconnue est t. Soit donc à résoudre $(-m+2)t-1=0$.
   On voit tout de suite que si $m=2$ cette équation n'admet pas de solution.
   $m=2$ correspond à la situation où $\vec{D}_m\subset\vec{\mathcal{P}}$. Comme $A\notin\mathcal{P}$, dans ce cas on a $D_m\cap\mathcal{P}=\emptyset$.
   Si $m\neq 2$, on trouve $t=\dfrac{1}{-m+2}$ et on en déduit que $D_m\cap\mathcal{P}$ est le point M_m de coordonnées $\left(1-\dfrac{m}{-m+2},\dfrac{1}{-m+2},-1+\dfrac{3}{-m+2}\right)$.

b) Quelle relation y-a-t-il entre $D_m \cap \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$?

Solution: Par définition de $\vec{u}_m$, on a $\vec{u}_m \in \vec{\mathcal{P}}'$. Comme $A \in \mathcal{P}'$, on a $D_m \subset \mathcal{P}'$ et ainsi $D_m \cap \mathcal{P}$ est contenu dans $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Pour $m \neq 2$, les points décrits par $D_m \cap \mathcal{P}$ sont tous sur la droite affine $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

c) Qu'observez-vous pour $D_m \cap \mathcal{P}$ lorsque m tend vers $+\infty$?

Solution: Dans la question a) ci-dessus, on a vu que lorsque $D_m \cap \mathcal{P}$ n'est pas vide, c'est un point M_m de coordonnées $(1 - \frac{m}{-m+2}, \frac{1}{-m+2}, -1 + \frac{3}{-m+2})$. On observe que lorsque m tend vers $+\infty$, $(1 - \frac{m}{-m+2}, \frac{1}{-m+2}, -1 + \frac{3}{-m+2})$ tend vers $(2, 0, -1)$ (regarder la limite coordonnée par coordonnée).

Pour m assez grand, et la droite D_m admet pour vecteur directeur
$\vec{v}_m = \frac{1}{m}\vec{u}_m = -\vec{i} + \frac{1}{m}\vec{j} + \frac{3}{m}\vec{k}$.
Quand m tend vers $+\infty$, D_m "tend vers" la droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{i}$.

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés dans un plan affine réel $\mathcal{P}$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ et on considère $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application affine définie par $f(A) = I$, $f(B) = J$ et $f(C) = K$.

1. Exprimer chacun des vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{JK}$ et $\vec{KI}$ comme combinaison linéaire de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

   Solution: En utilisant la définition du milieu d'un segment et la relation de Chasles on a:

   - $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AC}$
   - $\vec{JK} = \vec{JC} + \vec{CK} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$
   - $\vec{KI} = \vec{KA} + \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$

2. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

   Solution: Par définition, $\vec{f}(\vec{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$. Comme $f(A) = I$ et $f(B) = J$, on obtient $\vec{f}(\vec{AB}) = \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. De même, $\vec{f}(\vec{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)}$, donc $\vec{f}(\vec{AC}) = \vec{IK} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

   On en déduit que la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$ est $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Montrer que f est bijective.

   Solution: On sait qu'une application affine f est une bijection si et seulement si $\vec{f}$ est bijective. Comme la matrice de $\vec{f}$ est inversible ($\det(S) = \frac{1}{4} \neq 0$) on en déduit que f est bijective.

   Au passage on remarquera que $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On munit le plan $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ et on note (x, y) les coordonnées d'un point M dans ce repère.

   a) Donner (en fonction de x et y) les coordonnées du point $M' = f(M)$.

   Solution: Par définition, on a $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$. En utilisant la relation de Chasles on écrit $\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(M)}$. f étant affine on a $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\vec{AM})$, et par linéarité de $\vec{f}$, $\vec{f}(\vec{AM}) = x\vec{f}(\vec{AB}) + y\vec{f}(\vec{AC})$. Ce qui donne, en utilisant la question 2., $\overrightarrow{Af(M)} = \frac{1-y}{2}\vec{AB} + \frac{x+y}{2}\vec{AC}$.

Le point $M' = f(M)$ a donc pour coordonnées

$$(x', y') = \frac{1}{2}(-y + 1, x + y).$$

On remarquera que cela s'écrit encore $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, où S est la matrice trouvée dans la question 2.

b) Résoudre l'équation $M = f(M)$.

Solution: En utilisant l'expression des coordonnées de $f(M)$ calculée dans la question précédente, on peut résoudre l'équation $(x, y) = \frac{1}{2}(-y + 1, x + y)$ pour constater que le seul point fixe de f est le centre de gravité du triangle ABC.

5. On note $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ les images réciproques par f des droites AB, BC et CA ($\mathcal{D}_1 = f^{-1}(AB)$, $\mathcal{D}_2 = f^{-1}(BC)$, $\mathcal{D}_3 = f^{-1}(CA)$).

a) Montrer que $\mathcal{D}_1$ est la droite parallèle à BC et passant par A. (Indication: on pourra remarquer que les droites AB et JK sont parallèles).

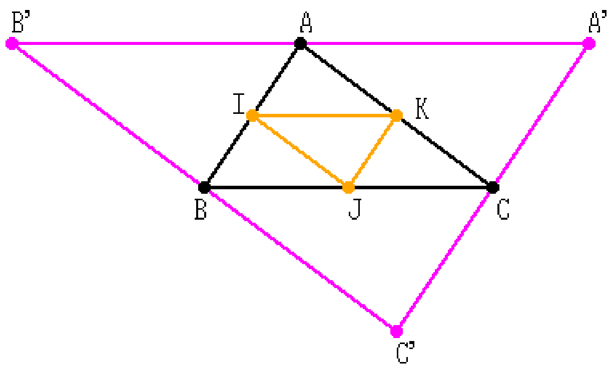
Solution: f étant affine bijective, on a f^{-1} affine bijective. AB et JK étant parallèles, on a $f^{-1}(AB)$ et $f^{-1}(JK)$ qui sont des droites parallèles. Or $f^{-1}(JK) = BC$. Ainsi $\mathcal{D}_1$ est parallèle à BC. $\mathcal{D}_1$ passe par A car I étant sur AB, $f^{-1}(AB)$ passe par le point $f^{-1}(I) = A$. D'où le résultat.

b) Décrire les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.

Solution: De manière analogue à la question a) ci-dessus, $\mathcal{D}_2$ est la parallèle à CA par B et $\mathcal{D}_3$ est la parallèle à AB par C.
Réponse sans valeur si on n'a rien dit de cohérent sur le a) ci-dessus.

c) Faire un dessin et placer les points A, B, C, I, J, K, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(C)$.

Solution: A étant le point d'intersection de AB et AC, f étant bijective, $f^{-1}(A)$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$.
De manière analogue, $f^{-1}(B)$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1$ et $f^{-1}(C)$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_2$.



Exercice 3. $\mathcal{P}$ est un plan affine réel, A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$.

Soit U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $U = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } \gamma \neq 0\}$.

Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$ donné, on définit une application $f_{\alpha\beta\gamma} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ par

$$f_{\alpha\beta\gamma}(M) = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (M, \gamma))$$

où $\mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (M, \gamma))$ désigne le barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta), (M, \gamma)$.

1. Montrer que si $\alpha + \beta = 0$, alors $f_{\alpha\beta\gamma}$ est une translation.
   Donner le vecteur de cette translation.

   Solution: Posons $M' = f_{\alpha\beta\gamma}(M)$. Par définition de $f_{\alpha\beta\gamma}$, on a $\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + \gamma\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$. Avec $\beta = -\alpha$ on obtient $\gamma = 1$ (du fait que $\alpha + \beta + \gamma = 1$) et l'égalité précédente devient $\alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MM'} = -\alpha\overrightarrow{AB}$. On en déduit que si $\alpha + \beta = 0$, alors $f_{\alpha\beta\gamma}$ est une translation de vecteur $\vec{v} = -\alpha\overrightarrow{AB}$.

2. Montrer que si $\alpha + \beta \neq 0$, alors $f_{\alpha\beta\gamma}$ est une homothétie.
   Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.

   Solution: Si $\alpha + \beta \neq 0$, posons $I_{\alpha\beta} = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$ (point bien défini). Pour $M \in \mathcal{P}$, soit $M' = f_{\alpha\beta\gamma}(M)$. Par la relation de Chasles, l'égalité $\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + \gamma\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$ devient $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{M'I_{\alpha\beta}} + \gamma\overrightarrow{I_{\alpha\beta}M} = \vec{0}$. On en déduit $\overrightarrow{I_{\alpha\beta}M'} = \gamma\overrightarrow{I_{\alpha\beta}M}$, donc $f_{\alpha\beta\gamma}$ est une homothétie de centre $I_{\alpha\beta}$ et de rapport γ.

3. On pose $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$ et pour tout $M \in \mathcal{P}$, $M' = f_{\alpha\beta\gamma}(M)$.
   Montrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$, $AMBM'$ est un parallélogramme.

   Solution: On peut utiliser la question 2. ci-dessus pour conclure que $f_{\alpha\beta\gamma}$ est une homothétie de centre le milieu I du segment $[AB]$ et de rapport -1 (c'est une symétrie centrale). $[MM']$ et $[AB]$ ont ainsi même milieu, donc $AMBM'$ est un parallélogramme.

   On peut aussi écrire que par définition du barycentre on a $\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} - \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.
   Ce qui donne $\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MB}$. Ce qui signifie bien que $AMBM'$ est un parallélogramme.
