Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Partiel du 4 mai 2009 (durée: 1h30) - Barème (à titre indicatif): 5,10,5

Vous pouvez utiliser vos notes de cours et de TD.

Calculatrices et téléphones portables sont interdits.

$\boxed{\text{Calculs et résultats doivent être accompagnés de justifications sobres et pertinentes}}$

Exercice 1. Soit X un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On note $(x,\,y,\,z)$ les coordonnées d'un point M de X. Soient A, B, C et D les quatre points de coordonnées respectives $(0,2,1)$, $(2,1,4)$, $(1,3,1)$ et $(3,-2,-1)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. On note $\mathcal{P}$ le plan engendré par les points A, B et C. Calculer la distance d du point D au plan $\mathcal{P}$. Trouver un autre point $E\in X$ à cette même distance d de $\mathcal{P}$.

Exercice 2. Le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$.
On considère les points A, B et C dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(0,0)$, $(4,0)$ et $(6,6)$. On note H l'orthocentre du triangle ABC et Γ le cercle circonscrit au triangle ABC.
(Rappel: l'orthocentre est le point de concours des trois hauteurs; le cercle circonscrit est l'unique cercle passant par les trois sommets du triangle; le centre du cercle circonscrit est le point de concours des trois médiatrices.)

1. Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC? Faire un dessin.
2. Montrer que le cercle Γ a pour centre le point N de coordonnées $(2,4)$.
   On note H_1 le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite AB.
   Montrer que H_1 est sur le cercle Γ. Placer les points N et H_1 sur le dessin de la question 1.
3. Soient H_2 le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite AC et H_3 le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite BC. Montrer que H_2 et H_3 sont sur le cercle Γ.
   Placer les points H_2 et H_3 sur le dessin de la question 1.

Exercice 3. $\mathcal{P}$ est le plan euclidien usuel, A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Soit U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par $U=\{\underline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4\,/\,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1 \text{ et } \lambda_4\neq 0\}$.

Pour $\underline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in U$ donné, on définit une application $f_{\underline{\lambda}}\colon\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ par

$f_{\underline{\lambda}}(M)=\mathrm{Bar}((A,\,\lambda_1),\,(B,\,\lambda_2),\,(C,\,\lambda_3),\,(M,\,\lambda_4))$ où $\mathrm{Bar}((A,\,\lambda_1),\,(B,\,\lambda_2),\,(C,\,\lambda_3),\,(M,\,\lambda_4))$ désigne le barycentre du système de points pondérés $(A,\lambda_1),(B,\lambda_2),(C,\lambda_3),(M,\lambda_4)$.

On se propose de trouver tous les $\underline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in U$ pour lesquels $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie.

1. On suppose que $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in U$ et $\lambda_4\neq 1$.
   a) Montrer que le point $I_{\underline{\lambda}}=\mathrm{Bar}((A,\,\lambda_1),\,(B,\,\lambda_2),\,(C,\,\lambda_3))$ est bien défini et est un point fixe de $f_{\underline{\lambda}}$. En déduire que $f_{\underline{\lambda}}$ est une homothétie. Montrer que $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie si et seulement si $\lambda_4=-1$.
   b) Pour $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$, faire un dessin du triangle ABC et de son image $A'B'C'$ par $f_{\underline{\lambda}}$.
2. On suppose que $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in U$ et $\lambda_4=1$.
   Pour $M,N\in\mathcal{P}$, on pose $M'=f_{\underline{\lambda}}(M)$, $N'=f_{\underline{\lambda}}(N)$. Montrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$.
   En déduire que $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie. Préciser la nature de cette isométrie.
3. Conclure.