Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Partiel du 23 mars 2009 (durée: 1h30) - Barème (à titre indicatif): 6,10,4

Vous pouvez utiliser vos notes de cours et de TD.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. X est un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X dans ce repère.

Soient A le point de coordonnées $(1, 0, -1)$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vecteurs définis par $\vec{v}_1 = -\vec{i}$, $\vec{v}_2 = \vec{j} + 3\vec{k}$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - y + z - 1 = 0$, on note $\mathcal{P}'$ le plan passant par A et de direction $\vec{\mathcal{P}'}$ engendrée par $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

1. Dans chacun des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, donner trois points non alignés.
2. Donner une base de $\vec{\mathcal{P}} \cap \vec{\mathcal{P}'}$.
3. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est non vide en donnant explicitement un point dans cette intersection. Décrire $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.
4. Soit D_m la droite affine passant par le point A et de direction engendrée par le vecteur $\vec{u}_m$ défini par $\vec{u}_m = m\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, où m est un paramètre parcourant $\mathbb{N}$.
   a) Décrire (en fonction du paramètre m) l'intersection de D_m avec le plan $\mathcal{P}$.
   b) Quelle relation y-a-t-il entre $D_m \cap \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$?
   c) **(hors barème)** Qu'observez-vous pour $D_m \cap \mathcal{P}$ lorsque m tend vers $+\infty$?

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés dans un plan affine réel $\mathcal{P}$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ et on considère $f: \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application affine définie par $f(A) = I$, $f(B) = J$ et $f(C) = K$.

1. Exprimer chacun des vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{JK}$ et $\vec{KI}$ comme combinaison linéaire de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.
3. Montrer que f est bijective.
4. On munit le plan $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ et on note (x, y) les coordonnées d'un point M dans ce repère.
   a) Donner (en fonction de x et y) les coordonnées du point $M' = f(M)$.
   b) Résoudre l'équation $M = f(M)$.
5. On note $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ les images réciproques par f des droites AB, BC et CA ($\mathcal{D}_1 = f^{-1}(AB)$, $\mathcal{D}_2 = f^{-1}(BC)$, $\mathcal{D}_3 = f^{-1}(CA)$).
   a) Montrer que $\mathcal{D}_1$ est la droite parallèle à BC et passant par A. (Indication: on pourra remarquer que les droites AB et JK sont parallèles).
   b) Décrire les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$.
   c) Faire un dessin et placer les points A, B, C, I, J, K, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(C)$.

Tourner la page S.V.P.

Exercice 3. $\mathcal{P}$ est un plan affine réel, A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$.

Soit U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $U = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } \gamma \neq 0\}$.

Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$ donné, on définit une application $f_{\alpha\beta\gamma} \colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ par

$$f_{\alpha\beta\gamma}(M) = \mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (M, \gamma))$$

où $\mathrm{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (M, \gamma))$ désigne le barycentre du système de points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta), (M, \gamma)$.

1. Montrer que si $\alpha + \beta = 0$, alors $f_{\alpha\beta\gamma}$ est une translation.
   Donner le vecteur de cette translation.

2. Montrer que si $\alpha + \beta \neq 0$, alors $f_{\alpha\beta\gamma}$ est une homothétie.
   Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.

3. On pose $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$ et pour tout $M \in \mathcal{P}$, $M' = f_{\alpha\beta\gamma}(M)$.
   Montrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$, $AMBM'$ est un parallélogramme.
