Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2007/2008

1ère SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 (DL1EMA2)
Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

Corrigé de l'épreuve écrite de Mathématiques de la première session

---

Exercice 1. (6 points)
On considère la fonction réelle f définie par la formule $f(x) = \ln(5 - x^2)$.

a) Le domaine de définition de f est un intervalle D de $\mathbb{R}$. Quel est cet intervalle?

b) Calculer la dérivée de f sur son domaine de définition D.

c) On considère sur l'intervalle $[0, 2]$, la fonction g définie par la formule
$g(x) = \dfrac{2x}{5 - x^2} + x^2 - x\,e^x + 10.$
Après avoir vérifié que $[0, 2]$ est contenu dans l'intervalle D, calculer l'intégrale
$i = \displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{dx}.$

Solution:

a) $f(x)$ est bien définie si et seulement si $5 - x^2 > 0$. Ce qui signifie $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) > 0$. On en déduit facilement que le domaine de définition de f est l'intervalle $D = \Big] - \sqrt{5}, \sqrt{5}\Big[$.

b) f est dérivable sur D et on a, $f'(x) = \dfrac{-2x}{5 - x^2}$.

c) La fonction $x \mapsto x^2 - x\,e^x + 10$ étant définie sur $\mathbb{R}$, tout entier, on voit que l'expression $\dfrac{2x}{5 - x^2} + x^2 - x\,e^x + 10$ est définie sur $D' = \mathbb{R} \setminus \Big\{ - \sqrt{5}, \sqrt{5}\Big\}$. D est évidemment contenu dans D' et l'intervalle $[0, 2]$ est contenu dans D car $-\sqrt{5} < 0 < 2 < \sqrt{5}$.
D'après la question b), la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{5 - x^2}$ admet $-f(x)$ pour primitive, sur l'intervalle $[0, 2]$.
Comme la fonction $x \mapsto x^2 + 10$ admet $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 + 10x$ pour primitive, il ne nous reste plus qu'à trouver une primitive de la fonction $x \mapsto x\,e^x$.
En utilisant la technique d'intégration par parties où on a posé $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$, de sorte que $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$, on a $\displaystyle\int x\,e^x \mathrm{dx} = x\,e^x - \int e^x \mathrm{dx} = x\,e^x - e^x + \lambda$ (où λ est une constante réelle quelconque). Nous avons donc finalement
$\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{dx} = \Big[- \ln(5 - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - x\,e^x + e^x + 10x\Big]_0^2 = (\frac{8}{3} - e^2 + 20) + \ln(5) - 1.$
Conclusion: $i = \displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{dx} = \frac{65}{3} + \ln(5) - e^2.$

Exercice 2. (6 points)
Sur l'intervalle $[0,\ 1]$ on considère les deux fonctions réelles f et g définies par les formules $f(x)=1+\dfrac{2}{x+1}$ et $g(x)=3-x$.

a) Montrer qu'on a $g(x)-f(x)=\dfrac{-x^2+x}{x+1}$.
En déduire que pour tout $x\in[0,1]$ on a $f(x)\leqslant g(x)$.

b) Calculer les intégrales $i_1=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$ et $i_2=\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{dx}$.

c) Déduire des questions a) et b) que $\ln(2)\leqslant\dfrac{3}{4}$.

Solution:

a) On a $g(x)-f(x)=3-x-(1+\dfrac{2}{x+1})=2-x-\dfrac{2}{x+1}$. Une simple mise au même dénominateur donne $g(x)-f(x)=\dfrac{-x^2+x}{x+1}$. Comme x parcourt l'intervalle $[0,\ 1]$, on a $x+1>0$, donc l'expression $\dfrac{-x^2+x}{x+1}$ a même signe que le trinôme $-x^2+x$. Or le trinôme $-x^2+x$ qui admet 0 et 1 pour racines est positif ou nul sur $[0,1]$. On a donc $g(x)-f(x)\geqslant 0$, ce qui signifie $f(x)\leqslant g(x)$ (sur l'intervalle $[0,1]$).

b) On a $i_1=\displaystyle\int_0^1(1+\dfrac{2}{x+1})\mathrm{dx}=[x+2\ln(x+1)]_0^1=1+2\ln(2)$ et $i_2=\left[3x-\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1=\dfrac{5}{2}$.

c) D'après la question a), nous savons que $f\leqslant g$.
Nous en déduisons $i_1\leqslant i_2$, c'est-à-dire $1+2\ln(2)\leqslant\dfrac{5}{2}$, ou encore $2\ln(2)\leqslant\dfrac{3}{2}$.
D'où finalement l'inégalité $\ln(2)\leqslant\dfrac{3}{4}$.

Exercice 3. (3 points)
Etudier la convergence de l'intégrale impropre $i=\displaystyle\int_0^{+\infty}250e^{-\frac{1}{5}t}\mathrm{dt}$.

Solution: Pour $b\in\left[0,\ +\infty\right[$, posons $i(b)=\displaystyle\int_0^b 250e^{-\frac{1}{5}t}\mathrm{dt}$. $t\mapsto e^{-\frac{1}{5}t}$ admettant pour primitive $t\mapsto -5e^{-\frac{1}{5}t}$, nous avons facilement $i(b)=-1250\left[e^{-\frac{1}{5}t}\right]_0^b=1250(1-e^{-\frac{1}{5}b})$.
Par définition, $\displaystyle\int_0^{+\infty}250e^{-\frac{1}{5}t}\mathrm{dt}=\lim_{b\longrightarrow+\infty}i(b)$. Or $\displaystyle\lim_{b\longrightarrow+\infty}i(b)=1250$.
Notre intégrale impropre converge donc vers 1250.

Exercice 4. (5 points)
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on considère le triangle Δ défini par $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$.

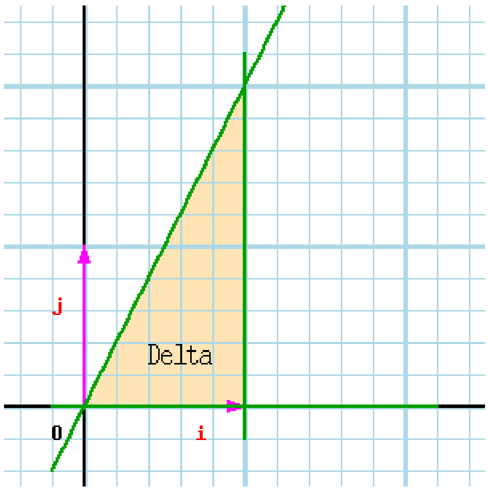
a) Dessiner le triangle Δ.

b) On considère sur Δ la fonction f définie par $f(x,y) = e^x + y$. Calculer l'intégrale double $I = \displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

c) On considère à présent le rectangle R de $\mathbb{R}^2$ défini par $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.
Calculer l'intégrale double $J = \displaystyle\iint_R (e^x + y)\mathrm{dxdy}$.

Solution:

a)



Dessin du triangle Δ.

b) Par le théorème de Fubini on a $I = \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{2x} (e^x + y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}$.

$x \in [0,1]$ étant fixé, on a $I(x) = \displaystyle\int_0^{2x} (e^x + y)\mathrm{dy} = \left[e^x y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{2x} = 2xe^x + 2x^2$.

On a donc $I = \displaystyle\int_0^1 (2xe^x + 2x^2)\mathrm{dx} = 2\left[xe^x - e^x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2(\frac{1}{3} + 1) = \frac{8}{3}$.

c) On utilise encore le théorème de Fubini pour avoir $J = \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^2 (e^x + y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}$.

$x \in [0,1]$ étant fixé, on a $I(x) = \displaystyle\int_0^2 (e^x + y)\mathrm{dy} = \left[e^x y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 2e^x + 2$.

On a donc $J = \displaystyle\int_0^1 (2e^x + 2)\mathrm{dx} = 2[\,e^x + x]_0^1 = 2e$.
