Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2007/2008

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, J. YAMEOGO

CORRIGÉ SUCCINCT DE LA FEUILLE TD N°1 - semaine du 4 février 2008
(les énoncés sont en bleu)

Exercice 1. (réviser les formules de dérivation)

a) f et g étant deux fonctions réelles dérivables, lorsque cela a un sens, rappeler les règles de calcul de la dérivée de la somme $(f+g)$, du produit $(f\times g)$, du quotient $\frac{f}{g}$, de la composée $f\circ g$.

Réponse:

$$(f+g)'=f'+g',\ \ (f\times g)'=f'\times g+f\times g',\ \ \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2},\ \ (f\circ g)'=(f'\circ g)\times g'$$

b) Après avoir précisé leur domaine de définition, calculer les dérivées des fonctions réelles définies par les formules suivantes:

$f_1(x)=\ln(2x+3)-\frac{1}{x}$, $f_2(x)=\sin(x)e^{-x}-x^3\cos(x)$,
$f_3(x)=\sqrt{4-e^{2x}}$, $f_4(x)=\frac{\ln(x^2-4x+3)}{-x+5}$.

Réponse:

domaine de f_1: $\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[\setminus\{0\}$; $f_1'(x)=\frac{2}{2x+3}+\frac{1}{x^2}$, valable sur tout le domaine de f_1

domaine de f_2: $\mathbb{R}$; $f_2'(x)=(\cos(x)-\sin(x))e^{-x}-3x^2\cos(x)+x^3\sin(x)$, valable sur $\mathbb{R}$

domaine de f_3: $]-\infty,\ln(2)]$; $f_3'(x)=-\frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{2x}}}$, valable sur le domaine de f_3 privé de $\ln(2)$

domaine de f_4: $]-\infty,1[\cup]3,5[\cup]5,+\infty[$;

$f_4'(x)=\frac{2x-4}{(x^2-4x+3)(-x+5)}+\frac{\ln(x^2-4x+3)}{(-x+5)^2}$, valable sur tout le domaine de f_4

Exercice 2. (comparer des fonctions, comparer des intégrales définies)

Sur l'intervalle $[-2,2]$, on considère les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$f_1(x) = 1 + \frac{6}{x+4} \quad \text{et} \quad f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 5.$$

a) Les fonctions f_1 et f_2 sont-elles convexe ou concave sur l'intervalle $[-2,2]$?

Réponse: on étudie le signe de la dérivée seconde de f_1 (resp. f_2).

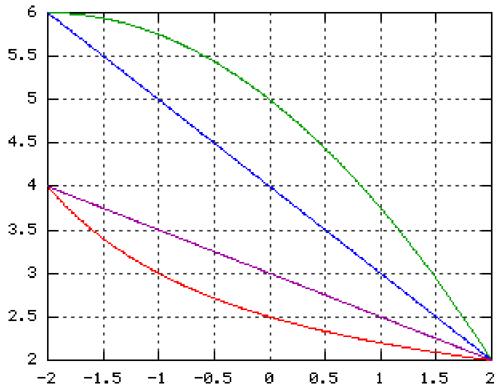
$f_1'(x) = -\dfrac{6}{(x+4)^2}$, $f_2''(x) = \dfrac{12}{(x+4)^3}$. On constate que sur l'intervalle $[-2,2]$, on a $x+4>0$, donc $\dfrac{12}{(x+4)^3}$ est strictement positif, ce qui permet de conclure que f_3 est convexe. Un calcul rapide donne $f_2''(x) = -\frac{1}{2} < 0$, donc f_2 est concave.

b) Sur le même intervalle $[-2,2]$, on considère les fonctions f_3 et f_4 définies par

$$f_3(x) = -x+4, \ f_4(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, dessiner sur l'intervalle $[-2, 2]$, les graphes des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

Graphes: le graphe de f_1 est en rouge, celui de f_2 en vert, f_3 en bleu et f_4 couleur magenta.



2. Sans les calculer, comparer les quatre intégrales suivantes:

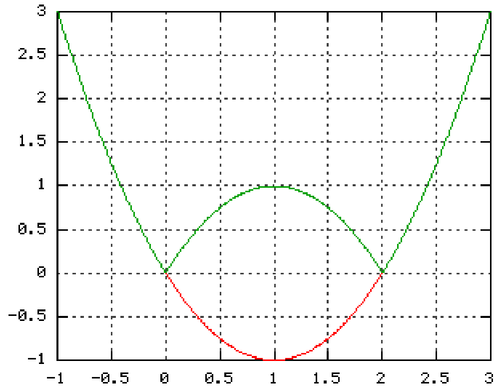
$$I_1 = \int_{-2}^{2} f_1(x)\mathrm{dx}, \ I_2 = \int_{-2}^{2} f_2(x)\mathrm{dx}, \ I_3 = \int_{-2}^{2} f_3(x)\mathrm{dx}, \ I_4 = \int_{-2}^{2} f_4(x)\mathrm{dx}.$$

Réponse: le graphe de f_4 est le segment de droite joignant les deux points $(-2, f_1(-2))$ et $(2, f_1(2))$. f_1 étant convexe, on en déduit $f_1 \leqslant f_4$. Une étude du signe de $(f_3 - f_4)$ montre que sur $[-2, 2]$, on a $f_4 \leqslant f_3$. Le graphe de f_3 est le segment de droite joignant les deux points $(-2, f_2(-2))$ et $(2, f_2(2))$. f_2 étant concave, on a $f_3 \leqslant f_2$. Nous avons donc $f_1 \leqslant f_4 \leqslant f_3 \leqslant f_2$, d'où $I_1 \leqslant I_4 \leqslant I_3 \leqslant I_2$

Exercice 3. (dessiner un graphe, calculer une aire)

a) Dessiner dans un repère orthonormé le graphe de la fonction $f\colon[-1,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2-2x$ puis celui de la fonction $g\colon[-1,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\left|f(x)\right|$.

Les graphes de f et g (g en vert):



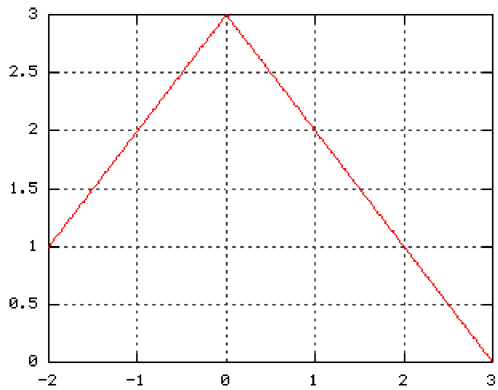
b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant g(x)\right\}$.

Réponse: Comme f est positive ou nulle sur $[-1,0]\cup[2,3]$ et négative ou nulle sur $[0,2]$, on a $\mathcal{A}=\displaystyle\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}-f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

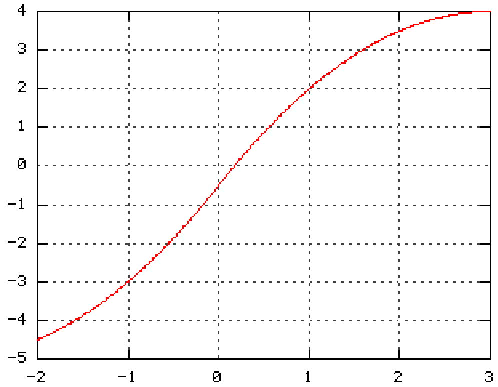
D'où $\mathcal{A}=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{2}^{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=4.$

Exercice 4. (calculer une primitive prenant une valeur donnée en un point donné)

Soit $f\colon[-2,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=3-|x|$.
Dessiner le graphe de f et calculer la primitive F de f qui prend la valeur 2 en 1.
Le graphe de f:



Une primitive de $\left|x\right|$ est $\frac{1}{2}x\left|x\right|$ (voir les notes de cours) et une primitive de $x\mapsto 3$ est $3x$.
Toute primitive de f s'écrit donc $F(x)=-\frac{1}{2}x\left|x\right|+3x+\lambda$ où λ est une constante réelle.
La condition $F(1)=2$ donne $-\frac{1}{2}+3+\lambda=2$, d'où $\lambda=-\frac{1}{2}$.
Conclusion, la primitive de f prenant la valeur 2 en 1 est la fonction F définie par $F(x)=-\frac{1}{2}x\left|x\right|+3x-\frac{1}{2}$ dont voici le graphe:



Exercice 5. (savoir utiliser les primitives de quelques fonctions usuelles)

Après avoir précisé leur domaine de définition, calculer des primitives pour les fonctions suivantes:

$f_1(x) = 3x\sqrt{x} - e^{-2x}$, $f_2(x) = x^2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{1}{x^3}$, $f_3(x) = 3^x - 2\sin(x)$, $f_4(x) = x^{\frac{1}{3}} + 5\cos(x)$.

Réponse:

$$\int f_1(x)\mathrm{dx} = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \lambda$$

$$\int f_2(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{3}x^3 - 7\ln\left|x\right| - \frac{1}{2x^2} + \lambda$$

$$\int f_3(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{\ln(3)}3^x + 2\cos(x) + \lambda$$

$$\int f_4(x)\mathrm{dx} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 5\sin(x)$$