南 京 大 学

研 究 生 毕 业 论 文

（申 请 博 士 学 位）

论文题目:　　无序动力系统中的Anderson局域化

作　　者:　　赵 之 彦

指导教师:　　尤 建 功　教授

专　　业:　　数 学

研究方向:　　动 力 系 统

2013 年 4 月

无序动力系统中的 ANDERSON 局域化

（申请南京大学理学博士学位论文）

培养单位: 南京大学数学系
学 科: 数 学
研 究 生: 赵 之 彦
指导教师: 尤 建 功 教授

二零一三 年 四 月

ANDERSON LOCALIZATION

IN DISORDERED DYNAMICAL SYSTEMS

Dissertation Submitted
Nanjing University
in partial fufillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Science

POSTGRADUATE:	Zhiyan Zhao
MENTOR:	Professor Jiangong You
SPECIALIZATION:	Mathematics
UNIVERSITY:	Nanjing University

April, 2013

目　录

致　　谢

在博士学习生涯行将结束之际，我非常庆幸在这一宝贵的人生历程中，能得到许多人的关心和帮助。谨以此文，表达我心中无限感激之情。

首先，我想对我的导师尤建功教授表达最真挚的敬意和谢意。不论是在硕士阶段还是博士阶段，尤老师高深的学术造诣和严谨的治学风格，都深刻地影响着我。在尤老师的指导下，我开始对自己现在从事的研究领域产生兴趣，并进行深入的学习和探究。与尤老师在学术上的多番讨论，使我不断成熟，而在这期间所培养的思考问题的方式以及不断积累的经验，会是我今后工作学习生活中最为宝贵的无形财富。通过尤老师的帮助，我还获得了很多与国内外顶尖学者交流的机会，对此我也不胜感激。

其次，我还要感谢我的两位师兄：耿建生教授和王奕倩教授。耿老师毫无保留的倾囊相授，使我能够很好地了解无穷维KAM这一新兴的研究领域，逐渐掌握该领域的主要研究方法，并且与其合力完成多项工作。其深厚的理论功底、精到的研究思路和严谨的治学态度，均使我受益良多。王老师在学习和生活上也给予了我很多无微不至的关怀和帮助。在平时的交谈中，他会以丰富的经验为我这样的后辈指明方向。在科研工作中遇到瓶颈之时，他也会不厌其烦地鼓励我去面对并战胜困难。每念及此，不免感动。

特别地，我想感谢法国巴黎七大的Hakan Eliasson教授。Eliasson教授在2011年和2012年两度造访南京之际，与我们研究组的成员进行了愉快而深刻的交流与讨论，帮助我们的工作取得了突破性的进展。在他与尤老师的帮助之下，我也获得了出国做博士后的机会，从而可以继续从事自己感兴趣的数学研究事业。

此外，我还由衷地感谢侯宣继副教授、苗栋副教授、王婧、吴健、张世文、陶凯、周麒、蔡乐文、刘仲凯、孙冠华、徐新冬、任秀芳、王均、吴云超、张正鹤、焦蕾、牛华伟、杨念、梁锦浩、周诗迪、李祥、景晓先、蔡傲等师兄弟。与他们在一起，我度过了人生中最为难忘的一段时光。在大家相互学习、相互照顾的氛围之中，我受益匪浅。

最后，感谢我的父母长期以来在生活上对我的关爱与支持。没有他们，就没有我的今天。

赵　之　彦

二零一三年四月

毕业论文题目: 无序动力系统中的**Anderson**局域化
数学 专业 **2010** 级博士生 姓名: 赵之彦
指导教师(姓名、职称): 尤建功 教授

摘　　要

在本论文中，我们试图从数学的角度阐述并研究Anderson局域化这一备受关注的物理现象。我们所考虑的无序系统是两个重要的准晶模型，即

- 一维非线性Maryland模型：

$$\mathrm{i}\dot{q_n} = \epsilon(q_{n+1}+q_{n-1}) + \tan\pi(x+n\tilde{\alpha})q_n + \epsilon|q_n|^2 q_n, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{0.1}$$

  其中$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，而$\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}$为某个固定的Diophantine向量；

- 一维非线性拟周期Schrödinger方程：

$$\mathrm{i}\dot{q_n} = \epsilon(q_{n+1}+q_{n-1}) + V(x+n\tilde{\alpha})q_n + |q_n|^2 q_n, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{0.2}$$

  其中V为$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的非常值解析函数，$\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}$为某个固定的Diophantine数。

在第一章中，我们以遍历Schrödinger算子作为主要研究对象，介绍线性无序系统中的局域化现象。算子谱理论中的相关概念，如指数局域化、动态局域化等，会在此章中给出。对于三个重要的模型，即线性Anderson模型、线性Maryland模型以及一维线性拟周期Schrödinger算子，我们会分别陈述已有的相关结果。

在第二章中，我们考虑一维非线性Maryland模型。我们证明，对于“大多数”紧支集小振幅的初始条件$(q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$，当$\epsilon$充分小时，对“大多数”的$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，方程(0.1)的解$(q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足：$\forall s>0$，扩散范数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2s}|q_n(t)|^2$$

关于时间t是一致有界的。

在第三章中，我们考虑一维非线性拟周期Schrödinger方程。对于“大多数”紧支集的初始条件$(q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$，当$\epsilon$充分小时，对几乎处处的$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，方程(0.2)的解$(q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足：$\forall s > 0$，

$$\sup_t \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2s}|q_n(t)|^2 < \infty.$$

关键词：无序介质；Anderson局域化；非线性Schrödinger方程；扰动； KAM

THESIS: ANDERSON LOCALIZATION IN DISORDERED DYNAMICAL SYSTEMS

SPECIALIZATION: Mathematics

POSTGRADUATE: Zhiyan Zhao

MENTOR: Professor Jiangong You

Abstract

In this thesis, we try to explain and investigate Anderson localization, an intriguing physical phenomenon, from the perspective of mathematics. The disordered systems we consider are two quasi-crystal models, i.e.,

- one-dimensional nonlinear Maryland model:

$$\mathrm{i}\dot{q_n} = \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + \tan \pi(x + n\tilde{\alpha})q_n + \epsilon|q_n|^2 q_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{0.3}$$

  where $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, and $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ is some fixed Diophantine number;

- one-dimensional nonlinear quasi-periodic Schrödinger equation:

$$\mathrm{i}\dot{q_n} = \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + V(x + n\tilde{\alpha})q_n + |q_n|^2 q_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{0.4}$$

  where V is a nonconstant real-analytic function on $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, and $\tilde{\alpha}$ is some fixed Diophantine number.

In the first chapter, we take the ergodic Schrödinger operator as the main object of study, to explain localization in *linear* disorder systems. Some concepts in the spectral theory of operators, e.g., exponential localization, dynamical localization, will be given in this chapter. For three significant models, i.e., linear Anderson model, linear Maryland model and one-dimensional linear quasi-periodic Schrödinger operator, we shall state the corresponding conclusions respectively.

In the second chapter, we consider the one-dimensional nonlinear Maryland model. We shall prove that, for "most" compactly-supported small-amplitude initial data $(q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$, if ϵ is sufficiently small, then for "most" $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, the solution $(q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ of Equation (0.3) satisfies: $\forall s > 0$, the diffusion norm

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2s}|q_n(t)|^2$$

is uniformly bounded with respect to t.

In the third chapter, we consider the one-dimensional nonlinear quasi-periodic Schrödinger equation. For "most" compactly-supported initial data $(q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$, if ϵ is sufficiently small, then for a.e. $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, the solution $(q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ of Equation (0.4) satisfies: $\forall s > 0$,

$$\sup_t \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2s}|q_n(t)|^2 < \infty.$$

Key Words: disorder medium; Anderson localization; nonliear Schrödinger equation; perturbation; KAM

引 言

§0.1 物理背景

粒子或波在无序介质中的局域化，是固态物理学与光学中最受关注的现象之一。美国物理学家，Nobel物理学奖得主P.W.Anderson[3]开启了对这一现象的研究。在Anderson的模型中，介质的无序性是通过随机位势产生的。他研究了在这样的晶格中无相互作用的电子的运动。如果随机程度不断增强并超过了某一临界值，那么对于初始状态下集中于某一区域的波包，其在晶格中的扩散就会随之消失。自Anderson之后，仍有多位物理学家由于在局域化研究中的杰出贡献，获得Nobel物理学奖。2012年，美国物理学家S.Haroche与法国物理学家D.Wineland因为研究能够量度和操控个体量子系统的突破性实验方法获此殊荣。

近年来，一些无序性相对较弱的介质，如准晶体，开始受到物理学家们的关注。这样的介质，往往可以通过拟周期或者概周期的位势来产生。作为Bose-Einstein凝聚态以及光学中的重要模型，Maryland[5]模型以及Aubry-André[4]模型（又称Harper模型[29]）就是其中典型的代表。在这样一类的线性系统中，尤其是在一维的情形下，局域化已经得到了充分的研究[42]，甚至还有一些严格的数学论证也得以建立[32]。

我们可以考虑数学物理领域中著名的almost Mathieu算子$H_{x,\lambda,\tilde{\alpha}}:\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$，

$$(H_{x,\lambda,\tilde{\alpha}}\psi)_n=(\psi_{n+1}+\psi_{n-1})+\lambda\cos 2\pi(x+n\tilde{\alpha})\psi_n,\quad n\in\mathbb{Z},$$

其中n是格点的指标，$\tilde{\alpha}$为两个格点之间的波数之比，$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$是任一初始相位，而$\psi_n$为一复变量，其模的平方表示在格点$n$处找到粒子的概率。当$\tilde{\alpha}$为一取定的Diophantine数时，对充分大的$\lambda$以及几乎处处的$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，$H_{x,\lambda,\tilde{\alpha}}$会呈现出动态局域化[23, 25]现象，即任取紧支集的$\psi\in\ell^2(\mathbb{Z})$以及$s>0$，

$$\sup_t R^{(s)}(t):=\sup_t\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^{2s}|(e^{\mathrm{i}H_{x,\lambda,\tilde{\alpha}}t}\psi)_n|^2<\infty.$$

这就意味着，在任何时间点，都不会发生太大幅度的能量转移。

特别地，对almost Mathieu算子，扩散与局域化之间的转变是明显存在的。从谱理论的角度，Jitomirskaya[32]证明了，对几乎处处的x，$H_{x,\lambda,\tilde{\alpha}}$具有

1. $\lambda > 2$：纯点谱以及指数衰减的特征函数；

2. $\lambda = 2$：纯奇异连续谱；

3. $\lambda < 2$：纯绝对连续谱。

而在一些物理实验中，存在着一些数值模拟结果与以上结论完美地符合（例如[30]）。取$\tilde{\alpha} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，初始波包为一$\delta-$函数，将波宽函数

$$R^{(1)}(t) := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |(e^{\mathrm{i}H_{x,\lambda,\tilde{\alpha}}t}\psi)_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

的增长性按照$R^{(1)}(t) \sim t^{\gamma}$的方式刻划，那么，根据$\lambda$取值的不同，$R^{(1)}(t)$会呈现出三种不同的算术形态：

1. $\lambda > 2$：$\gamma = 0$；

2. $\lambda = 2$：$\gamma \sim 0.5$；

3. $\lambda < 2$：$\gamma = 1$。

然而，当粒子间的相互作用即非线性的因素加入系统之后，情况就不是那么明显了。这种相互作用，会强烈地影响由无序性所诱导出的局域化现象。为研究这样的系统，我们可以从Hartree-Fock理论中的Gross-Pitaevskii（GP）方程[28, 38]，得到一个推广的Aubry-André模型，其中包含了一个表示平均场相互作用的非线性项。其Hamilton函数为

$$H = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[(\psi_{n+1}\bar{\psi}_n + \bar{\psi}_{n+1}\psi_n) + \lambda \cos 2\pi(x + n\tilde{\alpha})|\psi_n|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi_n|^4 \right],$$

而根据$\mathrm{i}\dot{\psi}_n = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}_n}$所产生的运动方程即为非线性Schrödinger方程

$$\mathrm{i}\dot{\psi}_n + (\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) + \lambda \cos 2\pi(n\tilde{\alpha} + x)\psi_n + \beta|\psi_n|^2\psi_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{0.5}$$

这可以看做是离散化格点上的GP方程。此外，离散化GP方程的其他类似版本，也可以用来刻划不同情形下凝聚态的动力学行为（例如，[46]）。

Larcher-Dalfovo-Modugno[35]通过数值实验证明，如果初始波包为$\delta-$函数，

$$\psi_n(0) = \delta_{n,0},$$

那么对于(0.5)的解$\psi(t)=(\psi_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$，

$$R^{(1)}(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|\psi_n(t)|^2$$

在很长一段时间稳定于某一范围中。这可以理解为，局域化现象能够被观察到。相反地，如果扩散始于一宽度为σ的Gaussian波包

$$\psi_n(0)=ce^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}},$$

那么$R^{(1)}(t)$会持续地增长。这表明，局域化被破坏了。由此可见，在非线性系统中，初值的不同形态会强烈地影响局域化的形成，这与线性情形是截然不同的。

§0.2 相关的数学工作

在数学物理理论中，Fröhlich-Spencer-Wayne[19]开启了对非线性无序系统中局域化的研究。通过KAM工具，他们对非耦合系统

$$\mathrm{i}\dot{q}_n=V_nq_n+\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\epsilon_{mn}(q_m+\bar{q}_m)^2q_n,\quad n\in\mathbb{Z}^d,$$

中的大多数都构造了无穷维不变环面，其中$\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$为一族独立同分布的随机变量，$\epsilon_{mn}$充分小且在$|m-n|$足够大时为零。这些环面上的解，会始终集中在某一区域中。（Pöschel[39]以及Vittot-Bellissard[47]也有过类似的工作）

除以上结论之外，Fröhlich-Spencer-Wayne在同一论文中还提出下述猜想。

猜想[19] 考虑方程

$$\mathrm{i}\dot{q}_n=\epsilon(\Delta q)_n+V_nq_n+\delta|q_n|^2q_n,\quad n\in\mathbb{Z}^d,\tag{0.6}$$

其中$\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$为一族独立同分布的随机变量。如果$\epsilon$和$\delta$足够小，那么对这族方程中的“大多数”（乘积测度意义下），“大多数”（有限维空间中Lebesgue测度意义下）紧支集的初始条件$q(0)=(q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}^d}$，方程(0.6)的解$q(t)=(q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}^d}$满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}n^2|q_n(t)|^2=0.$$

近年来，关于以上猜想，人们取得了一些进展。Bourgain-Wang[10]证明了，如果ϵ, δ充分小，那么对于任意取定的小初值，存在(0.6)中的一大类方程，使得解$q(t) = (q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}^d}$关于时间$t$是拟周期的。具体结论表述为

定理 0.1 *[10] 考虑方程(0.6)。取定*$\mathcal{J} = \{n_1, \cdots, n_b\} \in \mathbb{Z}^d$, $b > 1$，并令$\omega = (V_{n_1}, \cdots, V_{n_b}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{J}}$。当$\epsilon = \delta = 0$时，以上方程有解

$$u_0(y,t) = \sum_{j=1}^{b} a_k e^{-iV_{n_j}t}\delta_{n_j}(y), \quad y \in \mathbb{Z}^d,$$

其中$a = (a_1, \cdots, a_b)$满足$\sum_{j=1}^{b}|a_j|$充分小。

对于$0 < \epsilon \ll 1$，存在正概率子集$X_\epsilon \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \setminus \mathbb{R}^{\mathcal{J}}$使得对$0 < \delta \ll 1$，若取定$x \in X_\epsilon$，则有正测*Cantor*集$\mathcal{G}_{\epsilon,\delta}(x,a) \in \mathbb{R}^{\mathcal{J}}$以及定义在$\mathcal{G}_{\epsilon,\delta}(x,a)$上的光滑函数$\omega_{\epsilon,\delta}(x,a)$使得当$\omega \in \mathcal{G}_{\epsilon,\delta}(x,a)$时，

$$u_{\epsilon,\delta,x}(y,t) = \sum_{(n,k)\in\mathbb{Z}^{d+b}} \hat{u}(n,k)e^{-i\langle k,\,\omega_{\epsilon,\delta}\rangle t}\delta_j(y)$$

是方程*(0.6)*的一个拟周期解，且

$$\begin{aligned} &\hat{u}(n_j, -e_j) = a_j, \quad k = 1, \cdots, b, \\ &\sum_{(n,k)\notin\mathcal{S}} e^{c(|n|+|k|)}|\hat{u}(n,k)| < \sqrt{\epsilon+\delta}, \\ &|\omega - \omega_{\epsilon,\delta}| < c(\epsilon+\delta), \end{aligned}$$

对某个$c > 0$成立，其中$\{e_j\}_{j=1}^{b}$是$\mathbb{Z}^b$上的基底向量，而$\mathcal{S} = \{n_j, -e_j\}_{j=1}^{b} \subset \mathbb{Z}^{d+b}$。集合$X_\epsilon$与$\mathcal{G}_{\epsilon,\delta}(x,a)$在$\epsilon+\delta \to 0$时分别满足

$$\mathrm{Prob}X_\epsilon \to 1, \quad \mathrm{mes}\mathbb{R}^{\mathcal{J}} \setminus \mathcal{G}_{\epsilon,\delta}(x,a) \to 0.$$

推论 0.1 对于$0 < \epsilon, \delta \ll 1$，存在正测概率集$X_{\epsilon,\delta} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$，在$\epsilon+\delta \to 0$时分别满足

$$\mathrm{Prob}X_\epsilon \to 1,$$

使得对取定的充分小的初值，方程*(0.6)*的解是拟周期的。

注释 0.1 以上这一结论，从另一个角度诠释了*Fröhlich-Spencer-Wayne*的猜想。但是对于“一个方程对应多个衰减性良好的解”的猜想，该结论并未给出直接描述。

§0.3 本论文结果概述

本文旨在通过分析与(0.5)形式类似的非线性Schrödinger方程，探究非线性无序动力系统中的局域化现象。我们会根据[35]的实验结论，以及Fröhlich-Spencer-Wayne的猜想，对两种重要的非线性准晶模型中的局域化严格数学论证。

(1) 考虑一维非线性Maryland模型

$$\mathrm{i}\dot{q}_n = \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + \tan \pi(x + n\tilde{\alpha})q_n + |q_n|^2 q_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

其中$\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$为一Diophantine数，$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。对于"大多数"紧支集小振幅的初始条件$(q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$，当$\epsilon$充分小时，对"大多数"的$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，以上方程的解$(q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足：$\forall s > 0$，扩散范数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2s}|q_n(t)|^2$$

关于时间t是一致有界的。具体陈述见定理2.1。

(2) 考虑一维非线性拟周期Schrödinger方程

$$\mathrm{i}\dot{q}_n = \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + V(x + n\tilde{\alpha})q_n + |q_n|^2 q_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

其中$\tilde{\alpha}$也为一Diophantine数，V是$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的一个非常值解析函数。对于"大多数"紧支集的初始条件$(q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$，当$\epsilon$充分小时，对几乎处处的$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，以上方程的解$(q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足：$\forall s > 0$，

$$\sup_t \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2s}|q_n(t)|^2 < \infty.$$

具体陈述见定理3.1。

在本论文的各种证明过程以及表达式中，我们会遇到许多正的常数。这些常数依赖于Hamilton系统，空间维数等因素。从现在起，这些常数会被标记为$c, c_1, c_2, \cdots$。有的时候，即使是不同的常数，我们也会采用相同的符号来表示。

第一章　线性Schrödinger算子的局域化

考虑线性Schrödinger方程

$$\mathrm{i}\dot{q}_n = \epsilon(\Delta q)_n + V_n q_n, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \tag{1.1}$$

其中$d \geq 1$，Δ表示离散的Laplace算子，即

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1, & |i-j|_{\ell^1} = 1 \\ 0, & |i-j|_{\ell^1} \neq 1 \end{cases},$$ [1]

$\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$满足某种无序性条件且与时间$t$无关。这一方程解的性质完全由$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的线性算子

$$(Hq)_n = \epsilon(\Delta q)_n + V_n q_n, \quad n \in \mathbb{Z}^d,$$

所决定，因此方程(1.1)的局域化也可以理解为算子H的局域化。

§1.1　遍历算子的局域化

定义 1.1 给定一个概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$。我们称一族线性算子

$$H_\theta : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d), \quad \theta \in \Omega$$

是$\mathbb{Z}^d$**-遍历**的，如果存在$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$上的一族遍历的保测变换$\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}^d}$满足

(1) Ω的任意T_i-不变子集A，都满足$\mathbb{P}(A) = 0$或1;

(2) $H_{T_i\theta} = U_i H_\theta U_i^*$，此处酉算子$U_i : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$满足$(U_i q)_n = q_{n-i}$。

我们采用$\sigma(H)$（$\sigma_{ac}(H)$, $\sigma_{sc}(H)$, $\sigma_{pp}(H)$）表示算子H的谱（绝对连续谱，奇异连续谱，点谱）。在遍历算子的谱理论中，有如下基本结论。

定理 1.1 *(Pastur[36])* 如果H_θ是一族$\mathbb{Z}^d$-遍历的自伴算子，则存在一个闭集$\Sigma \in \mathbb{R}$使得，在$\mathbb{P}$-概率1意义下，

$$\sigma(H_\theta) = \Sigma.$$

此外，存在闭集$\Sigma_{ac}, \Sigma_{sc}, \Sigma_{pp} \in \mathbb{R}$使得，在$\mathbb{P}$-概率1意义下，

$$\sigma_{ac}(H_\theta) = \Sigma_{ac}, \quad \sigma_{sc}(H_\theta) = \Sigma_{sc}, \quad \sigma_{pp}(H_\theta) = \Sigma_{pp}.$$

---

[1] 从此处开始，我们以$|\cdot|$表示$\mathbb{Z}^d$上的ℓ^1距离。

对于局域化，我们可以从谱理论和动力系统两个方面进行研究。由于研究的角度不同，局域化也就有不同的定义方式。在本文中，我们主要研究如下三种局域化。

定义 1.2 对于一族$\mathbb{Z}^d$-遍历算子$H_\theta : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$，我们称$H_\theta$具有

(1) **谱局域化(SL)**
如果H_θ在$\mathbb{P}$-概率1意义下只有点谱，即$\Sigma = \Sigma_{pp}$且$\Sigma_{ac} = \Sigma_{sc} = \emptyset$。

(2) **指数局域化(EL)**
如果H_θ具有谱局域化且其特征函数在$\mathbb{P}$-概率1意义下呈现指数衰减性。

(3) **动态局域化(DL)**
如果对于任意具有紧支集$\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$，在$\mathbb{P}$-概率1意义下有

$$\sup_t \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |n|^{2s} |(e^{-\mathrm{i}tH_\theta}\psi)_n|^2 < \infty, \quad \forall s > 0.$$

以上三种局域化有如下的蕴含关系，

$$(DL) \Rightarrow (EL) \Rightarrow (SL).$$

值得一提的是，$(EL) \not\Rightarrow (DL)$，反例的构造详见文献[15]。

对于动态局域化的判定，有一个著名且重要的充分条件。

定义 1.3 若$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的算子H具有谱局域化，且对每一特征值μ_n, $n \in \mathbb{Z}^d$，相应的特征向量$\psi^n = (\psi^n_j)_{j\in\mathbb{Z}^d}$对某个$r > 0$以及$|x_n| \sim |n|^{1/d}$满足

$$|\psi^n_j| \le c_\sigma e^{\sigma|x_n|} e^{-r|j-x_n|}, \quad \forall \sigma > 0,$$

则称算子H具有**半一致局域的特征态(SULE)**。进一步，若

$$|\psi^n_j| \le c_\sigma e^{-r|j-x_n|}, \quad \forall \sigma > 0,$$

则称算子H具有**一致局域的特征态(ULE)**。

显然，(ULE)⇒(SULE)。

定理 1.2 *(Rio-Jitormirskaya-Last-Simon[15])* 若$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的算子H具有半一致局域的特征态，那么H具有动态局域化。

此外，还有其他和动态局域化相关的条件，包括充分条件和必要条件，详见[45]。

§1.2　线性Schrödinger算子

§1.2.1　Anderson模型

考虑Anderson模型$H:\ell^2(\mathbb{Z}^d)\to\ell^2(\mathbb{Z}^d)$，

$$(Hq)_n=\epsilon(\Delta q)_n+V_nq_n,\quad n\in\mathbb{Z}^d, \tag{1.2}$$

其中Δ表示离散的Laplace算子，而$\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$为一族独立同分布的随机变量，且其共同的分布为

$$g=\tilde{g}(V_n)dV_n,\quad \tilde{g}\in L^\infty.$$

我们假设supp$g$是有界的，则$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$可看作是带有乘积概率测度

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}^d}g(V_n)=\prod_{n\in\mathbb{Z}^d}\tilde{g}(V_n)dV_n,\quad \tilde{g}\in L^\infty$$

的概率空间。容易验证，H是$\mathbb{Z}^d$-遍历的自伴算子，其中$\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$是乘积概率空间$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$中的随机变量。关于$H$的谱集，在概率1意义下，我们有（[14, 37]）

$$\sigma(H)=[-2\epsilon d,2\epsilon d]+\mathrm{supp}g.$$

Anderson模型一直都是数学家和物理学家们关心的对象。关于Anderson模型中的局域化，有很多著名的工作[1, 2, 17, 18, 24, 26, 27, 48]。

定理 1.3 *(Germinet–De Bièvre[24])* 考虑*Anderson*模型*(1.2)*。

- 当$d=1$时，H具有动态局域化。
- 当$d>1$时，如果ϵ足够小，则H具有动态局域化。

§1.2.2　Maryland模型

在本节中，我们对线性Maryland模型中的局域化进行详细叙述，即考虑$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的线性Schödinger算子$L=L(x)$，

$$(Lq)_n=\epsilon(\Delta q)_n+\tan(x+\langle n,\tilde{\alpha}\rangle)q_n,\quad n\in\mathbb{Z}^d,$$

其中$\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}^d$满足Diophantine条件：存在$\tilde{\gamma}>0$, $\tilde{\tau}>d$，使得

$$|\langle n,\tilde{\alpha}\rangle|_1\geq\frac{\tilde{\gamma}}{|n|^{\tilde{\tau}}},\quad \forall n\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}, \tag{1.3}$$

而x取自$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的全测子集

$$\mathcal{X} = \left\{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : x + \langle n, \tilde{\alpha}\rangle \neq \frac{1}{2},\ \ \forall n \in \mathbb{Z}^d\right\}.$$

该算子可以看做一个无穷维的矩阵，其矩阵元素为

$$L_{mn} = \begin{cases} \tan\pi(x + \langle n, \tilde{\alpha}\rangle), & m = n \\ \epsilon, & |m-n| = 1 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}.$$

根据正切函数以及Diophantine向量的性质，可知

$$|\tan\pi(x + \langle m, \tilde{\alpha}\rangle) - \tan\pi(x + \langle n, \tilde{\alpha}\rangle)| \geq \frac{\tilde{\gamma}}{|m-n|^{\tilde{\tau}}}, \quad m - n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}.$$

因此算子L模拟了没有共振的介质。这一点在KAM迭代过程中有着广泛且深入的应用。

定理 1.4 *考虑$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的线性Schrödinger算子*

$$(Lq)_n = \epsilon(\Delta q)_n + \tan\pi(x + \langle n, \tilde{\alpha}\rangle)q_n, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad x \in \mathcal{X}, \tag{1.4}$$

其中$\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^d$满足Diophantine条件(1.3)。存在正的$\epsilon_0 = \epsilon_0(\tilde{\alpha})$使得，当$0 < \epsilon < \epsilon_0$时，以下结论成立。

对某个$R > 0$，存在$\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im} z| < R\}$上1−周期的亚纯函数$\hat{V}$，满足

- *$\hat{V}$的极点为$x = \langle n, \tilde{\alpha}\rangle + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}^d$,*
- *$\hat{V}(x) - \tan\pi x$在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上是实解析的，且$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} |\hat{V}(x) - \tan\pi x| \leq \epsilon$,*

且对每一$x \in \mathcal{X}$，存在正交变换$U : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$，满足

$$|(U - I_{\mathbb{Z}^d})_{mn}| \leq c_L \epsilon e^{-2|m-n|}, \tag{1.5}$$

使得$U^* L U = \mathrm{diag}\{\hat{V}(x + \langle n, \tilde{\alpha}\rangle)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$。

这一定理（以其原始的形式）是由Bellissard-Lima-Scoppola[5]证明的，其证明过程会在附录三中给出。

推论 1.1 *[5] 如定理1.4中一样令*$0<\epsilon<\epsilon_0$。*则对每一*$x\in\mathcal{X}$，*算子*$L=L(x)$*具有一族完备的指数衰减的特征向量，而特征值的集合为*$\{\hat{V}(x+\langle n,\tilde{\alpha}\rangle)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$。

算子L还有很多其他重要的性质，在文献[5, 12, 15, 43]中有详细的陈述和证明。

根据(1.5)所给出的L各个特征向量的衰减性质，可知L具有一致局域的特征态。结合定理1.2，可得

推论 1.2 *如定理1.4中一样令*$0<\epsilon<\epsilon_0$，*则线性Schrödinger算子*L*具有动态局域化。*

§1.2.3 拟周期Schrödinger算子

我们首先考虑一维拟周期Schrödinger算子$T=T(x):\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$，

$$(Tq)_n=\epsilon(q_{n+1}+q_{n-1})+V(x+n\tilde{\alpha})q_n,\quad n\in\mathbb{Z},\tag{1.6}$$

其中$\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}^1$满足Diophantine条件(1.3)，而$V$为$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上一非常值实解析函数。如[16]中一样，位势函数$V$是一个Gevrey函数，即存在$C,\ L>0$使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}}|\partial^m V(x)|\le CL^m m!,\quad m\ge 0,\tag{1.7}$$

且还存在$\tilde{\xi},\ \tilde{s}>0$使得横截性条件

$$\max_{0\le m\le\tilde{s}}|\partial_\varphi^m(V(x+\varphi)-V(x))|\ge\tilde{\xi}>0,\quad\forall x,\forall\varphi,\tag{1.8}$$

$$\max_{0\le m\le\tilde{s}}|\partial_x^m(V(x+\varphi)-V(x))|\ge\tilde{\xi}|\varphi|_1,\quad\forall x,\forall\varphi,\tag{1.9}$$

成立。很明显，$V(x)=\cos 2\pi x$即T为almost Mathieu算子的情形是包含在其中的。

由文献[16]可知，当ϵ充分小时，对几乎处处的$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，$T_x$只有纯点谱。

定理 1.5 *(Eliasson[16]) 存在*$\epsilon_0=\epsilon_0(V,\tilde{\alpha})$*使得当*$0<\epsilon<\epsilon_0$*时，对于几乎处处的*$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，$T_x$*的谱为纯点谱，且具有一族*$\ell^2(\mathbb{Z})$*中的完备特征向量。此外，*$[\inf V,\sup V]\setminus\sigma(T_x)$*的测度在*$\epsilon\to 0$*时趋向于*$0$。

关于拟周期Schrödinger算子的纯点谱以及局域化，还有很多其他的工作，例如，[8, 11, 20, 31, 33, 44]。由于[16]的证明思想在我们考虑非线性问题时起着重要的作用，我们在此进行细致的描述。

首先，我们介绍一些和无穷维矩阵相关的符号。给定一个无穷维矩阵D，其中(m,n)位置的矩阵元素$D_{mn}\in\mathbb{R}$。对于$\Lambda\subset\mathbb{Z}$，定义

$$\mathbb{R}^{\Lambda}:=\{n\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}:n_i=0,\ \ \forall i\notin\Lambda\},\quad D_{\Lambda}:=\begin{cases}D_{mn}, & m,n\in\Lambda\\ \delta_{mn}, & \text{o.w.}\end{cases}.$$

那么映射

$$D_{\Lambda}:\mathbb{R}^{\Lambda}+\mathbb{R}^{\Lambda^{\perp}}\to\mathbb{R}^{\Lambda}+\mathbb{R}^{\Lambda^{\perp}},\quad \Lambda^{\perp}:=\mathbb{Z}\setminus\Lambda,$$

有两部分，第一部分为$\mathbb{R}^{\Lambda}\hookrightarrow\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\xrightarrow{D}\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\xrightarrow{\text{proj}}\mathbb{R}^{\Lambda}$，而第二部分为在$\mathbb{R}^{\Lambda^{\perp}}$上的恒同映射。当不存在歧义时，我们就直接用$D_{\Lambda}$表示其第一部分。

令$D_0=\operatorname{diag}\{V(x+n\tilde{\alpha})\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $Z_0=\epsilon\Delta$，且选取$\varepsilon_0=\epsilon^{\frac{1}{4}}$, $\sigma_0=1$以及任意的

$$M_0\geq\max\left\{2^{\tilde{s}+4}C\frac{L^{\tilde{s}+1}((\tilde{s}+1)!)^2}{\tilde{\xi}},\,2\tilde{\tau},\,8\right\},\quad N_0\geq 1,\quad \rho_0=N_0^{-1},$$

我们可以如[16]中那样定义以下序列：

$$\begin{aligned}&M_{\nu+1}=M_{\nu}^{\tilde{s}M_{\nu}^3},\quad a_{\nu}=\frac{1}{\tilde{\tau}}M_{\nu}^{-3\tilde{s}M_{\nu}^3},\quad \varepsilon_{\nu+1}=\varepsilon_{\nu}^{\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu}^{-a_{\nu}/2}},\\ &N_{\nu+1}=\varepsilon_{\nu}^{-a_{\nu}},\qquad \rho_{\nu+1}=\varepsilon_{\nu}^{a_{\nu}},\qquad\quad \sigma_{\nu+1}=\frac{1}{3}\rho_{\nu}.\end{aligned}\tag{1.10}$$

在之后的第三章中，我们考虑相应的非线性模型时，这些序列将会在KAM迭代过程中出现。

定理 1.6 如定理*1.4*中一样令$0<\epsilon<\epsilon_0$，则对于一维拟周期*Schrödinger*算子T，以下结论成立。

任意取定$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，存在一列正交矩阵$U_{\nu}$, $\nu=1,2,\cdots$，满足

$$|(U_{\nu}-I_{\mathbb{Z}})_{mn}|\leq\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{3}{2}\sigma_{\nu}|m-n|},$$

使得$U_{\nu}^{*}(D_0+Z_0)U_{\nu}=D_{\nu}+Z_{\nu}$，此处$Z_{\nu}$为一个满足

$$|(Z_{\nu})_{mn}|\leq\varepsilon_{\nu}e^{-\rho_{\nu}|m-n|}$$

的对称矩阵，而对称矩阵D_ν可通过一正交矩阵Q_ν实现分块对角化，其中

$$(Q_\nu)_{mn}=0,\quad |m-n|>N_\nu.$$

具体地，存在$\mathbb{Z}$的不相交分解$\bigcup_j \Lambda_j^\nu=\mathbb{Z}$使得

$$\tilde{D}^\nu=Q_\nu^* D_\nu Q_\nu=\prod_j \tilde{D}^\nu_{\Lambda_j^\nu},\quad \sharp\Lambda_j^\nu\le M_\nu,\ \ \mathrm{diam}\Lambda_j^\nu\le M_\nu N_\nu,\ \ \forall j.^2$$

此外，存在全测子集$\tilde{\mathcal{X}}\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}$使得当我们取定的$x$属于其中时，则对每个$k\in\mathbb{Z}$，存在正整数$\nu_0(k)$使得

$$\Lambda^{\nu+1}(k)=\Lambda^\nu(k),\quad \forall\nu\ge\nu_0(k).$$

在附录四中，我们将给出该命题的证明概要。

定理1.6说明了算子T只有纯点谱，而最后一段的描述，蕴含了半一致局域的特征态，因此

推论 1.3 如定理*1.4*中一样令$0<\epsilon<\epsilon_0$，则线性*Schrödinger*算子T具有动态局域化。

我们也可以考虑高维拟周期Schrödinger算子$\mathcal{H}:\ell^2(\mathbb{Z}^d)\to\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, $d>1$,

$$\mathcal{H}=\epsilon(\Delta q)_n+V(x_1+n_1\alpha_1,\cdots,x_d+n_d\alpha_d)q_n,\quad x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d,$$

其中V是$\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$上的非常值解析函数。Bourgain，Goldstein和Schlag[9]证明了$d=2$情形下的局域化，而Bourgain[7]后来将该结论推广至任意维数的情形。

定理 1.7 *[7]* 取定$x_0\in\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$。任取$\delta>0$，存在$\epsilon_0=\epsilon_0(V,\delta)$使得当$0<\epsilon<\epsilon_0$时，存在子集$\Omega=\Omega(\epsilon,V)\subset\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$满足

$$\mathrm{mes}(\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d\setminus\Omega)<\delta,$$

从而对$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\Omega$，$\mathcal{H}$具有指数局域化和动态局域化。

[2] $\mathbb{Z}$的不相交分解定义了整数的一种等价关系，所以对每个$n\in\mathbb{Z}$，我们可通过记号$\Lambda^\nu(n)$定义这种等价关系。

第二章　一维非线性Maryland模型中的局域化

在Bellissard-Lima-Scoppola[5]结论的基础之上，我们在本章中考虑一维非线性Maryland模型

$$\mathrm{i}\dot{q}_n = \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + \tan(x + n\tilde{\alpha})q_n + \epsilon|q_n|^2 q_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

其中$\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$满足Diophantine条件(1.3)，且$x$属于$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的全测子集

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : x + n\tilde{\alpha} \neq \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

§2.1　结论的陈述

我们首先对方程(2.1)进行适当的坐标变换，然后构造一个抽象的KAM定理，使其可以应用到变换后的系统中，进而研究新系统中的局域化现象。原系统(2.1)的局域化可由共轭的性质得到。值得一提的是，经过坐标变换之后，构造KAM定理所需的参数均提取自非线性项。实际上，初始坐标变换的可行性，是由正切函数及Diophantine数的特殊性质所保证的。

定理 2.1 任取$\mathcal{J} = \{n_1, \cdots, n_b\} \subset \mathbb{Z}$，$b > 1$，以及$\kappa > 0$，任给支集为$\mathcal{J}$的初值$q_{\mathbb{Z}}(0) = (q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$，满足$q_{\mathbb{Z}}(0) \in \epsilon^{\frac{\kappa}{2}} \cdot [0,1]^b$。存在一个充分小的$\epsilon_* = \epsilon_*(\tilde{\alpha}, \kappa, \mathcal{J})$，使得若$0 < \epsilon < \epsilon_*$则存在$\mathcal{X}$的子集$\mathcal{X}_\epsilon$对某个$\vartheta \in (0,1)$满足$\mathrm{mes}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_\epsilon) < \epsilon^{\vartheta}$，使得当$x \in \mathcal{X}_\epsilon$时，如下结果成立。

存在一*Cantor*集$\mathcal{O}_\epsilon = \mathcal{O}_\epsilon(x) \subset [0,1]^b$满足当$\epsilon \to 0$时$|[0,1]^b \setminus \mathcal{O}_\epsilon| \to 0$，[1] 使得当$q_{\mathbb{Z}}(0) \in \mathcal{O}_\epsilon$时，方程*(2.1)*的解$q_{\mathbb{Z}}(t) = (q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$满足

$$\sup_t \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2d}|q_n(t)|^2 < \infty, \quad \forall d > 0.$$

此外，对每一$n \in \mathbb{Z}$，$q_n(t)$关于时间是拟周期的。

注释 2.1 如*§0.1*所述，*(2.1)*中的非线性项$\epsilon|q_n|^2 q_n$具有其物理含义。不过，它在*Hamilton*函数中的特殊形式，即$\epsilon|q_n|^4$，并不是必须的。实际上，非线性项的形式只要是有限程或短程且次数有上界即可，例如，有限程形式

$$\epsilon|q_n|^4 + \epsilon|q_n|^2 \bar{q}_n q_{n+1} + \epsilon|q_n|^2 q_n \bar{q}_{n+1}$$

[1]从此处开始，我们在本论文中用记号$|\mathcal{O}|$表示$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^b$的Lebesgue测度。

或者短程形式

$$\epsilon|q_n|^2\sum_k e^{-\varrho|n-k|}|q_k|^4, \quad \varrho>0.$$

§2.2 一个抽象的无限维KAM定理

§2.2.1 空间和范数

取定$Z_1\subset\mathbb{Z}$以及$d,\rho>0$，$\ell^1_{d,\rho}(\mathbb{Z}_1)$表示满足

$$\|q\|_{d,\rho}:=\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}|q_n|\langle n\rangle^d e^{\rho|n|}<\infty,$$

的序列$q=(q_n)_{n\in\mathbb{Z}_1}$的空间，此处$\langle n\rangle:=\sqrt{1+n^2}$。对于$r,s>0$，$\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s)$则表示$\mathbb{T}^b\times\{I=0\}\times\{q=0\}\times\{\bar{q}=0\}$在$\mathbb{T}^b\times\mathbb{R}^b\times\ell^1_{d,\rho}(\mathbb{Z}_1)\times\ell^1_{d,\rho}(\mathbb{Z}_1)$中的邻域，即

$$\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s):=\{(\theta,I,q,\bar{q}):|\mathrm{Im}\theta|=|\mathrm{Im}(\theta_1,\cdots,\theta_b)|<r,|I|<s^2,\|q\|_{d,\rho}=\|\bar{q}\|_{d,\rho}<s\},$$

此处$|\cdot|$ 为b维向量的ℓ^1范数。

对$\mathcal{D}=\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s)$上$C^1_W$地依赖于$\xi\in\mathcal{O}$的实解析函数$F(\theta,I,q,\bar{q};\xi)$，[2] 我们将其关于$\theta,I,q,\bar{q}$展开成Taylor-Fourier级数的形式

$$F(\theta,I,q,\bar{q};\xi)=\sum_{\alpha,\beta}F_{\alpha\beta}(\theta,I;\xi)q^\alpha\bar{q}^\beta,$$

其中，对于只含有限非零元素的多重指数$\alpha:=\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\alpha_n e_n$, $\beta:=\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\beta_n e_n$, $\alpha_n,\beta_n\in\mathbb{N}$，

$$F_{\alpha\beta}(\theta,I;\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^b,\,l\in\mathbb{N}^b}F_{kl\alpha\beta}(\xi)I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}, \quad q^\alpha\bar{q}^\beta=\prod_{(\alpha_n,\beta_n)\neq(0,0)}q_n^{\alpha_n}\bar{q}_n^{\beta_n}.$$

（e_n表示第n个元素为1其他元素均为零的向量。）

定义 2.1 对于只含有限个非零元素的多重指数$(\alpha,\beta)=(\alpha_n,\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}_1}$，定义

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}(\alpha,\beta) &:= \{n\in\mathbb{Z}_1:(\alpha_n,\beta_n)\neq(0,0)\},\\ n^+_{\alpha\beta} &:= \max\{n\in\mathrm{supp}(\alpha,\beta)\},\\ n^-_{\alpha\beta} &:= \min\{n\in\mathrm{supp}(\alpha,\beta)\},\\ n^*_{\alpha\beta} &:= \max\{|n^+_{\alpha\beta}|,|n^-_{\alpha\beta}|\},\end{aligned}$$

[2]在本文中，所有关于参数$\xi\in\mathcal{O}$的依赖性都是C^1_W的，因此关于ξ的求导也是在此意义下进行的。

以及$|\alpha| := \sum_{n\in\mathbb{Z}_1} \alpha_n$，$|\beta| := \sum_{n\in\mathbb{Z}_1} \beta_n$。

特别地，如果$|\alpha| = |\beta| = 0$，定义$n^+_{\alpha\beta} = n^-_{\alpha\beta} = n^*_{\alpha\beta} = 0$。

令$|\partial_\xi F_{kl\alpha\beta}| := \sum_{i=1}^b |\partial_{\xi_i} F_{kl\alpha\beta}|$, $|F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} := \sup_{\xi\in\mathcal{O}} (|F_{kl\alpha\beta}| + |\partial_\xi F_{kl\alpha\beta}|)$，定义

$$\|F_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{O}} := \sum_{k,l} |F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}}\ |I^l| e^{|k||\mathrm{Im}\theta|}, \quad \|F\|_{\mathcal{O}} := \sum_{k,l,\alpha,\beta} |F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}}\ |I^l| e^{|k||\mathrm{Im}\theta|}\ |q^\alpha||\bar{q}^\beta|.$$

进一步，我们可定义F的加权范数[3]

$$\|F\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} := \sup_{\mathcal{D}} \|F\|_{\mathcal{O}}. \tag{2.2}$$

而F所对应的Hamilton向量场$X_F = (F_I, -F_\theta, (-\mathrm{i}F_{q_n})_{n\in\mathbb{Z}_1}, (\mathrm{i}F_{\bar{q}_n})_{n\in\mathbb{Z}_1})$，其在$\mathcal{D}\times\mathcal{O}$上的范数定义为

$$\|X_F\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} := \|\partial_I F\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} + \frac{1}{s^2}\|\partial_\theta F\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} + \sup_{\mathcal{D}} \frac{1}{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}_1} (\|\partial_{q_n} F\|_{\mathcal{O}} + \|\partial_{\bar{q}_n} F\|_{\mathcal{O}}) \langle n\rangle^d e^{|n|\rho}.$$

为了符号表示上的方便，当没有歧义存在时，我们可省略以上范数中的下标$\mathcal{O}$。

§2.2.2 KAM定理的叙述

首先考虑C^1_W地依赖于参数$\xi\in\mathcal{O}$，且具有如下形式的一族可积Hamilton系统

$$\mathcal{N} = e(\xi) + \langle\omega(\xi), I\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}_1} \Omega_n(\xi) q_n\bar{q}_n, \quad \mathbb{Z}_1 \subset \mathbb{Z}.$$

在此情形下，相空间赋予了辛结构$dI\wedge d\theta + \mathrm{i}\sum_{n\in\mathbb{Z}_1} dq_n\wedge d\bar{q}_n$。对每一个$\xi\in\mathcal{O}$，$\mathcal{N}$所对应的Hamilton运动方程为：

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{dq_n}{dt} = -\mathrm{i}\Omega_n q_n, \quad \frac{d\bar{q}_n}{dt} = \mathrm{i}\Omega_n \bar{q}_n, \quad n\in\mathbb{Z}_1.$$

其在相空间中的不变环面对应到该方程的一个特殊的解

$$(\theta, 0, 0, 0) \to (\theta + \omega t, 0, 0, 0).$$

现在，我们在某区域$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{d,\rho}(r,s)$上考虑扰动的Hamilton系统

$$H = \mathcal{N} + P = e(\xi) + \langle\omega(\xi), I\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}_1} \Omega_n(\xi) q_n\bar{q}_n + P(\theta, I, q, \bar{q}; \xi). \tag{2.3}$$

[3]对于向量值函数$F: \mathcal{D}\times\mathcal{O}\to\mathbb{C}^n$，则范数可定义为$\|F\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} := \sum_{i=1}^n \|F_i\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}$。

我们试图证明，对“大多数”的参数$\xi \in \mathcal{O}$（在Lebesgue 测度意义下），只要$\|X_P\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}$充分的小，Hamilton方程$H = \mathcal{N} + P$仍然具有不变环面，且运动方程在该环面上的解在空间中始终具有良好的衰减性。

在陈述KAM定理之前，我们还需对频率ω, Ω_n以及扰动P加上以下条件。

(A1) 切频的非退化性：映射$\xi \to \omega(\xi)$ 是$\mathcal{O}$与其像之间的一个C_W^1微分同胚。

(A2) 法频的正则性：对任意的$n \in \mathbb{Z}_1$，Ω_n关于ξ都是C_W^1函数，且$\sup\limits_{\xi\in\mathcal{O}} |\partial_\xi \Omega_n| \ll 1$。

(A3) 扰动的正则性：扰动部分P是关于$\theta, I, q, \bar{q}$的实解析函数，且C_W^1地依赖于$\xi \in \mathcal{O}$。

(A4) 扰动的衰减性：如果我们将P分解为$\breve{P} + \acute{P}$，其中

$$\breve{P} = \breve{P}(\theta, I, q, \bar{q}; \xi) = \sum_{\alpha,\beta} \breve{P}_{\alpha\beta} q^\alpha \bar{q}^\beta = \sum_{\substack{(k,l)\neq 0\\ \alpha,\beta}} P_{kl\alpha\beta} I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} q^\alpha \bar{q}^\beta,$$

$$\acute{P} = \acute{P}(q, \bar{q}; \xi) = \sum_{\alpha,\beta} \acute{P}_{\alpha\beta} q^\alpha \bar{q}^\beta = \sum_{\alpha,\beta} P_{00\alpha\beta} q^\alpha \bar{q}^\beta,$$

那么

$$\|\breve{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} \le \begin{cases} \varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha| + |\beta| \le 2 \\ e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha| + |\beta| \ge 3 \end{cases}, \tag{2.4}$$

$$\|\acute{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} \le \begin{cases} \varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha| + |\beta| \le 2 \\ e^{-\rho(n^+_{\alpha\beta} - n^-_{\alpha\beta})}, & |\alpha| + |\beta| \ge 3 \end{cases}. \tag{2.5}$$

(A5) 扰动的规范不变性*:* 对于$P = \sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}^b,\, l\in\mathbb{N}^b\\ \alpha,\beta}} P_{kl\alpha\beta} I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} q^\alpha \bar{q}^\beta$，若$\sum_{j=1}^b k_j + |\alpha| - |\beta| \neq 0$，则$P_{kl\alpha\beta} \equiv 0$。

定理 2.2 假设*(2.3)*中的*Hamilton*系统H满足$(\mathbf{A1}) - (\mathbf{A5})$。存在一个充分小的正数$\varepsilon_* = \varepsilon_*(\omega, \Omega_n, \varepsilon, r, s, d, \rho)$使得当$\|X_P\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s),\mathcal{O}} < \varepsilon \le \varepsilon_*$时，有一个正测的*Cantor*集$\mathcal{O}_\varepsilon \subset \mathcal{O}$满足：当$\varepsilon \to 0$时，$|\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_\varepsilon| \to 0$，且如下结论成立。

(a) 存在C_W^1的映射$\tilde{\omega} : \mathcal{O}_\varepsilon \to \mathbb{R}^b$使得当$\varepsilon \to 0$时，$|\tilde{\omega} - \omega|_{\mathcal{O}_\varepsilon} \to 0$。

(b) 存在关于θ解析且关于ξ是C_W^1的映射$\Psi : \mathbb{T}^b \times \mathcal{O}_\varepsilon \to \mathcal{D}_{d,0}(r/2, 0)$使得当$\varepsilon \to 0$时$\|\Psi - \Psi_0\|_{\mathcal{D}_{d,0}(r/2,0),\mathcal{O}_\varepsilon} \to 0$，此处$\Psi_0$为平凡的嵌入映射，即

$$\Psi_0 : \mathbb{T}^b \times \mathcal{O} \to \mathbb{T}^b \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}.$$

(c) 对任意$\theta \in \mathbb{T}^b$以及$\xi \in \mathcal{O}_\varepsilon$，$\Psi(\theta + \tilde{\omega}(\xi)t, \xi) = (\theta + \tilde{\omega}(\xi)t, I(t), q(t), \bar{q}(t))$是$H$所对应运动方程的一个$b$频拟周期解。

(d) 对每一t，$q(t) = (q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}_1} \in \ell^1_{d,0}(\mathbb{Z}_1)$。

注释 2.2 以上定理中的(d)表明

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_1} n^{2d}|q_n(t)|^2 < c\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\langle n\rangle^d |q_n(t)|\right)^2 < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

这蕴含了定理*2.1*的结论。

§2.3 Hamilton函数与标准型

回到方程(2.1)，并取定$x \in \mathcal{X}$。经过坐标变换$q_{\mathbb{Z}} = U\tilde{q}_{\mathbb{Z}}$，方程的线性部分中就不存在差分项了，此处$U$为定理1.4中所提到的正交变换。由非线性方程(2.1)转化得到的新方程对应着如下形式的Hamilton函数：

$$H(\tilde{q}_{\mathbb{Z}}, \bar{\tilde{q}}_{\mathbb{Z}}) = \Lambda + G := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{V}_n |\tilde{q}_n|^2 + \frac{1}{2}\epsilon \sum_{i,j,m,n\in\mathbb{Z}} u_{ijnm}\tilde{q}_i \bar{\tilde{q}}_j \tilde{q}_m \bar{\tilde{q}}_n, \tag{2.6}$$

这里$\hat{V}_n = \hat{V}_n(x) := \hat{V}(x + n\tilde{\alpha})$。$U$的副对角线衰减性(1.5)，蕴含了系数$u_{ijmn}$的衰减性质，即

$$|u_{ijmn}| < ce^{-2(\max\{i,j,m,n\}-\min\{i,j,m,n\})}. \tag{2.7}$$

实际上，

$$u_{ijmn} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} U_{li}\bar{U}_{lj}U_{lm}\bar{U}_{ln}. \tag{2.8}$$

不失一般性，可假设$i \leq j \leq m \leq n$，则

$$\begin{aligned}
|u_{ijmn}| &\leq c\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{-2(|i-l|+|j-l|+|m-l|+|n-l|)} \\
&\leq ce^{-2(n-i)}\sum_{l\in\mathbb{Z}} e^{-2(|j-l|+|m-l|)} \\
&\leq ce^{-2(n-i)}.
\end{aligned}$$

我们选取切方向$\mathcal{J} = \{n_1, \cdots, n_b\} \subset \mathbb{Z}$，且令$\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}\backslash\mathcal{J}$。当$\epsilon$足够小时，$|n_i| \leq \frac{\kappa}{6}|\ln\epsilon|$, $i = 1, \cdots, b$。

取定$r,d>0$以及$\rho=\frac{1}{4}$，$s\leq \epsilon^{\frac{2}{3}\kappa}$，并如§2.2.1中那样定义$\mathcal{D}=\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s)$。在引入作用-角变量以及参数之前，为了得到形式更好的标准型，我们需对Hamilton函数做一些变换处理。从现在起，为了符号简便，我们以$q_{\mathbb{Z}}$代替$\tilde{q}_{\mathbb{Z}}$来表示法变量。

命题 2.1 如果ϵ充分小，则存在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的子集$\mathcal{X}_\epsilon$对某$0<\vartheta<1$满足

$$\mathrm{mes}(\mathcal{X}\setminus\mathcal{X}_\epsilon)<\epsilon^{\vartheta},$$

使得当$x\in\mathcal{X}_\epsilon$时，存在辛变换$\Psi=\Psi(x)$将*(2.6)*中的H转化为C^1_W地依赖于参数$\xi\in\mathcal{O}:=[\epsilon^{\frac{\kappa}{12}},1]^b$的实解析*Hamilton*函数

$$\begin{aligned} H\circ\Psi &= \mathcal{N}+P \\ &:= e(\xi)+\langle\omega(\xi),I\rangle+\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\Omega_n(\xi)q_n\bar{q}_n+P(\theta,I,q,\bar{q};\xi), \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中，

- ω是$\mathcal{O}$与其像之间的一个C^1_W微分同胚，
- 对每一$n\in\mathbb{Z}_1$，Ω_n关于ξ都是C^1_W函数，满足$\sup\limits_{\xi\in\mathcal{O}}|\partial_\xi\Omega_n|\leq\epsilon$。

此外，P具有规范不变性，且若将P分解为$\breve{P}+\acute{P}$，其中

$$\breve{P}=\breve{P}(\theta,I,q,\bar{q};\xi)=\sum_{\alpha,\beta}\breve{P}_{\alpha\beta}q^\alpha\bar{q}^\beta=\sum_{\substack{(k,l)\neq 0\\ \alpha,\beta}}P_{kl\alpha\beta}I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}q^\alpha\bar{q}^\beta,$$

$$\acute{P}=\acute{P}(q,\bar{q};\xi)=\sum_{\alpha,\beta}\acute{P}_{\alpha\beta}q^\alpha\bar{q}^\beta=\sum_{\alpha,\beta}P_{00\alpha\beta}q^\alpha\bar{q}^\beta,$$

那么

$$\|\breve{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}\leq\begin{cases}\epsilon^{\frac{\kappa}{4}}e^{-\frac{1}{2}n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ e^{-\frac{1}{2}n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases}, \tag{2.10}$$

$$\|\acute{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}\leq\begin{cases}\epsilon^{\frac{\kappa}{4}}e^{-\frac{1}{2}n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ e^{-\frac{1}{2}(n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases}. \tag{2.11}$$

证明：该命题的证明分为如下三个部分。

- **辛变换的构造**

根据$H=\Lambda+G$的形式，令

$$T(q_{\mathbb{Z}},\,\bar{q}_{\mathbb{Z}})=\frac{1}{2}\epsilon\sum_{|i|,|j|,|m|,|n|\le\kappa|\ln\epsilon|}u_{ijmn}q_i\bar{q}_jq_m\bar{q}_n,$$
$$F(q_{\mathbb{Z}},\,\bar{q}_{\mathbb{Z}})=\frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon\sum_{\substack{\hat{V}_i-\hat{V}_j+\hat{V}_m-\hat{V}_n\neq 0\\|i|,|j|,|m|,|n|\le\kappa|\ln\epsilon|}}\frac{u_{ijmn}}{\hat{V}_i-\hat{V}_j+\hat{V}_m-\hat{V}_n}q_i\bar{q}_jq_m\bar{q}_n,$$

且令Ψ_F^1表示相应Hamilton相流的时间-1映射。对于取定的

$$i,j,m,n\in\mathbb{Z},\quad |i|,|j|,|m|,|n|\le\kappa|\ln\epsilon|,$$

我们考虑函数

$$V_{i,j,m,n}(x):=\hat{V}_i(x)-\hat{V}_j(x)+\hat{V}_m(x)-\hat{V}_n(x).$$

由于ϵ是足够小的，根据下面的引理2.1可知，存在$\mathcal{X}$的子集$\mathcal{X}_\epsilon$，对某个$0<\vartheta<1$满足

$$\mathrm{mes}(\mathcal{X}\setminus\mathcal{X}_\epsilon)\le\epsilon^{\vartheta},$$

使得当$\{i,m\}\neq\{j,n\}$时，$|V_{i,j,m,n}(x)|\ge\epsilon^{\frac{1}{4}}$。这就保证了$F$的系数中出现的分母有一致下界。

由同调方程

$$\{\Lambda,F\}+T=\frac{1}{2}\epsilon\sum_{|i|,|j|\le\kappa|\ln\epsilon|}u_{iijj}|q_i|^2|q_j|^2,$$

我们知坐标变换Ψ_F^1将H转化为

$$H\circ\Psi_F^1=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\hat{V}_i|q_i|^2+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{|i|,|j|\le\kappa|\ln\epsilon|}u_{iijj}|q_i|^2|q_j|^2+\tilde{R},\tag{2.12}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{R}\;\;=\;\;&G-T+\{G,F\}+\frac{1}{2!}\{\{\Lambda,F\},F\}+\frac{1}{2!}\{\{G,F\},F\}+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\{\cdots\{\Lambda,\underbrace{F\}\cdots,F}_{n}\}+\frac{1}{n!}\{\cdots\{G,\underbrace{F\}\cdots,F}_{n}\}+\cdots.\end{aligned}$$

将$\tilde{R}$以$\tilde{R}=\sum_{\alpha',\beta'}\tilde{R}_{\alpha'\beta'}q_{\mathbb{Z}}^{\alpha'}\bar{q}_{\mathbb{Z}}^{\beta'}$的方式展开。由$\tilde{R}$的构造，可知

$$\tilde{R}_{\alpha'\beta'}=0,\quad |\alpha'|\neq|\beta'|,\tag{2.13}$$
$$\tilde{R}_{\alpha'\beta'}=0,\quad |\alpha'|+|\beta'|<4,\tag{2.14}$$
$$\tilde{R}_{\alpha'\beta'}=0,\quad |\alpha'|+|\beta'|=4,\ \ n^*_{\alpha'\beta'}\le\kappa|\ln\epsilon|.\tag{2.15}$$

此外，通过应用之后的引理2.2，可得[4]

$$|\tilde{R}_{\alpha'\beta'}| \leq \epsilon e^{-2(n^+_{\alpha'\beta'}-n^-_{\alpha'\beta'})}.$$

- **作用–角变量的引入**

对Hamilton函数(2.12)引入作用–角变量以及振幅参数

$$q_n = \sqrt{I_n+\xi_n}e^{\mathrm{i}\theta_n}, \quad \bar{q}_n = \sqrt{I_n+\xi_n}e^{-\mathrm{i}\theta_n}, \quad n \in \mathcal{J},$$

其中$(I,\theta) = (I_{n_1},\cdots,I_{n_b},\theta_{n_1},\cdots,\theta_{n_b})$是$(q_n,\bar{q}_n)_{n\in\mathcal{J}}$–空间中在$\xi$附近的标准作用–角变量，而$\xi = (\xi_{n_1},\cdots,\xi_{n_b}) \in \epsilon^\kappa\cdot\mathcal{O} = \epsilon^\kappa[\epsilon^{\frac{\kappa}{12}},1]^b$为振幅参数，且令$(q,\bar{q}) = (q_n,\bar{q}_n)_{n\in\mathbb{Z}_1}$。那么Hamilton函数(2.12)转化为

$$\begin{aligned}
H\circ\Psi_F^1 &= \sum_{i\in\mathcal{J}}\hat{V}_i(I_i+\xi_i)+\sum_{i\in\mathbb{Z}_1}\hat{V}_i|q_i|^2+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{i\in\mathcal{J}}u_{iiii}(I_i+\xi_i)^2\\
&\quad+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i\in\mathcal{J},j\in\mathbb{Z}_1\\|j|\leq\kappa|\ln\epsilon|}}u_{iijj}(I_i+\xi_i)|q_j|^2+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i,j\in\mathcal{J}\\i\neq j}}u_{iijj}(I_i+\xi_i)(I_j+\xi_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}_1\\|i|,|j|\leq\kappa|\ln\epsilon|}}u_{iijj}|q_i|^2|q_j|^2+\tilde{R}\\
&= \sum_{i\in\mathcal{J}}\hat{V}_iI_i+\sum_{i\in\mathbb{Z}_1}\hat{V}_i|q_i|^2+\epsilon\sum_{i\in\mathcal{J}}u_{iiii}\xi_iI_i+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i,j\in\mathcal{J}\\i\neq j}}u_{iijj}(\xi_iI_j+\xi_jI_i)\\
&\quad+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i\in\mathcal{J},j\in\mathbb{Z}_1\\|j|\leq\kappa|\ln\epsilon|}}u_{iijj}\xi_i|q_j|^2+\left(\sum_{i\in\mathcal{J}}\hat{V}_i\xi_i+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{i\in\mathcal{J}}u_{iiii}\xi_i^2+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i,j\in\mathcal{J}\\j\neq i}}u_{iijj}\xi_i\xi_j\right)\\
&\quad+R,
\end{aligned}$$

此处

$$R = \tilde{R}+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{i\in\mathcal{J}}u_{iiii}I_i^2+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i,j\in\mathcal{J}\\i\neq j}}u_{iijj}I_iI_j+\frac{1}{2}\epsilon\sum_{\substack{i\in\mathcal{J},j\in\mathbb{Z}_1\\|j|\leq\kappa|\ln\epsilon|}}u_{iijj}I_i|q_j|^2.$$

通过尺度变换

$$\theta\to\theta, \quad I\to\epsilon^{\frac{4}{3}\kappa}I, \quad q\to\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa}q, \quad \bar{q}\to\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa}\bar{q}, \quad \xi\to\epsilon^\kappa\xi, \tag{2.16}$$

可得Hamilton函数

$$H\circ\Psi_F^1 = \epsilon^{-(1+\frac{7}{3}\kappa)}(H\circ\Psi_F^1)(\theta,\epsilon^{\frac{4}{3}\kappa}I,\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa}q,\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa}\bar{q};\epsilon^\kappa\xi) = \mathcal{N}+P,$$

[4]为了表达时方便，我们在此假设定理1.4中的常数$c_L = 1$。

其中$\mathcal{N}=e+\langle\omega,I\rangle+\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\Omega_n|q_n|^2$，而

$$
\begin{aligned}
e &= \epsilon^{-(1+\frac{4}{3}\kappa)}\sum_{i\in\mathcal{J}}\hat{V}_i\xi_i+\frac{1}{2}\epsilon^{-\frac{\kappa}{3}}\sum_{i\in\mathcal{J}}u_{iiii}\xi_i^2+\frac{1}{2}\epsilon^{-\frac{\kappa}{3}}\sum_{\substack{i,j\in\mathcal{J}\\ i\neq j}}u_{iijj}\xi_i\xi_j, \qquad (2.17)\\
\omega_i(\xi) &= \epsilon^{-(1+\kappa)}\hat{V}_i+u_{iiii}\xi_i+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j\in\mathcal{J}\\ j\neq i}}u_{iijj}\xi_j, \quad i\in\mathcal{J}, \qquad (2.18)\\
\Omega_n(\xi) &= \left\{\begin{array}{ll} \epsilon^{-(1+\kappa)}\hat{V}_n+\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathcal{J}}u_{iinn}\xi_i, & |n|\le\kappa|\ln\epsilon| \\ \epsilon^{-(1+\kappa)}\hat{V}_n, & |n|>\kappa|\ln\epsilon| \end{array}\right., \quad n\in\mathbb{Z}_1 \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

且$P=\epsilon^{-(1+\frac{7}{3}\kappa)}R(\theta,\epsilon^{\frac{4}{3}\kappa}I,\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa}q,\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa}\bar{q};\epsilon^{\kappa}\xi)$.

- **新Hamilton函数$\mathcal{N}+P$的性质**

由于如(2.8)中所示，$u_{iijj}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}|U_{il}|^2|U_{jl}|^2$，则根据表达式(2.18)，$b\times b$矩阵$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}$满足

$$
\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)_{ij}=\left\{\begin{array}{ll} \sum_{l\in\mathbb{Z}}|U_{il}|^4, & j=i \\ \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|U_{il}|^2|U_{jl}|^2, & j\neq i \end{array}\right., \quad i,j\in\mathcal{J}.
$$

通过(1.5)，可知

$$
|U_{ii}-1|<\epsilon, \quad |U_{il}|\le\epsilon e^{-2|i-l|}, \quad l\neq i.
$$

因此，$\sum_{l\in\mathbb{Z}}|U_{il}|^4>c(1-\epsilon)^4$，而$\sup_{i\neq j}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|U_{il}|^2|U_{jl}|^2\le c\epsilon^2$。$\epsilon$充分小保证了$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}$的对角占优性，从而$\omega$为$\mathcal{O}$与其象之间的$C_W^1$微分同胚。

对于$n\in\mathbb{Z}_1$，(2.19)中Ω_n的表达式说明对于$|n|>\kappa|\ln\epsilon|$，$\partial_\xi\Omega_n=0$。至于$|n|\le\kappa|\ln\epsilon|$，

$$
|\partial_{\xi_i}\Omega_n|=\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|U_{il}|^2|U_{nl}|^2\le c\epsilon^2, \quad i\in\mathcal{J}.
$$

由(2.13)和(2.14)可知，$\tilde{R}$的各个非零项可写作

$$
\tilde{R}_{\alpha'\beta'}q_{\mathbb{Z}}^{\alpha'}\bar{q}_{\mathbb{Z}}^{\beta'}=\tilde{R}_{\alpha'\beta'}q_{\mathcal{J}}^{\alpha_{\mathcal{J}}}\bar{q}_{\mathcal{J}}^{\beta_{\mathcal{J}}}q^{\alpha}\bar{q}^{\beta}, \quad |\alpha'|+|\beta'|\ge 4, \quad |\alpha'|=|\beta'|,
$$

此处$\alpha_{\mathcal{J}}=(\alpha_n)_{n\in\mathcal{J}}$, $\beta_{\mathcal{J}}=(\beta_n)_{n\in\mathcal{J}}$，且$q_{\mathcal{J}}=(q_n)_{n\in\mathcal{J}}$, $\bar{q}_{\mathcal{J}}=(\bar{q}_n)_{n\in\mathcal{J}}$，那么作用–角变量的引入就带来形式为

$$
\tilde{R}_{\alpha'\beta'}\left(\prod_{n\in\mathcal{J}}\left(\sqrt{I_n+\xi_n}\right)^{\alpha_n+\beta_n}e^{\mathrm{i}(\alpha_n-\beta_n)\theta_n}\right)q^{\alpha}\bar{q}^{\beta},
$$

的项，它们经尺度变换(2.16)转化为

$$\mathcal{E}\tilde{R}_{\alpha'\beta'}\left(\prod_{n\in\mathcal{J}}\left(\sqrt{\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}I_n+\xi_n}\right)^{\alpha_n+\beta_n}e^{\mathrm{i}(\alpha_n-\beta_n)\theta_n}\right)q^\alpha\bar{q}^\beta, \tag{2.20}$$

其中$\mathcal{E}=\epsilon^{-(1+\frac{7}{3}\kappa)}\epsilon^{\frac{\kappa}{2}(|\alpha_{\mathcal{J}}|+|\beta_{\mathcal{J}}|)+\frac{2}{3}\kappa(|\alpha|+|\beta|)}$。作为$P=\sum_{k,\alpha,\beta}P_{k\alpha\beta}(I)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}q^\alpha\bar{q}^\beta$的各项，这意味着，

$$\sum_{j=1}^{b}k_j=\sum_{n\in\mathcal{J}}(\alpha_n-\beta_n).$$

那么$\sum_{j=1}^{b}k_j+|\alpha|-|\beta|$就等于其初始状态下的值$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n=|\alpha'|-|\beta'|$。因此，根据(2.13)，当$\sum_{j=1}^{b}k_j+|\alpha|-|\beta|=|\alpha'|-|\beta'|\neq 0$时，$P_{k\alpha\beta}\equiv 0$。通过对$P_{k\alpha\beta}$关于$I$进行展开，$P$的规范不变性得以验证。

现在，我们验证P的系数衰减性。按照命题中叙述的方式，将其分解为$P=\breve{P}+\acute{P}$。

1) $|\alpha_{\mathcal{J}}|+|\beta_{\mathcal{J}}|=0$
在此情形下，根据(2.14)可知$|\alpha'|+|\beta'|=|\alpha|+|\beta|\geq 4$，且(2.20)中的项为$\epsilon^{-(1+\frac{7}{3}\kappa)}\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa(|\alpha|+|\beta|)}\tilde{R}_{\alpha'\beta'}q^\alpha\bar{q}^\beta$。这是$\acute{P}$的高阶项，其系数不超过

$$\epsilon^{\frac{\kappa}{3}-1}|\tilde{R}_{\alpha'\beta'}|\leq\epsilon^{\frac{\kappa}{3}-1}\cdot\epsilon e^{-2(n^+_{\alpha'\beta'}-n^-_{\alpha'\beta'})}\leq\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}e^{-2(n^+_{\alpha'\beta'}-n^-_{\alpha'\beta'})}. \tag{2.21}$$

2) $|\alpha_{\mathcal{J}}|+|\beta_{\mathcal{J}}|\geq 1$
这意味着$\mathrm{supp}(\alpha',\beta')\cap[-\frac{\kappa}{6}|\ln\epsilon|,\frac{\kappa}{6}|\ln\epsilon|]\neq\emptyset$，即存在$|n|\leq\frac{\kappa}{6}|\ln\epsilon|$使得$(\alpha'_n,\beta'_n)\neq(0,0)$，那么就有

$$n^*_{\alpha'\beta'}-\frac{\kappa}{6}|\ln\epsilon|\leq n^*_{\alpha'\beta'}-|n|\leq n^+_{\alpha'\beta'}-n^-_{\alpha'\beta'}.$$

从而，

$$|\tilde{R}_{\alpha'\beta'}|\leq\epsilon e^{-2(n^+_{\alpha'\beta'}-n^-_{\alpha'\beta'})}\leq\epsilon e^{\frac{\kappa}{3}|\ln\epsilon|}e^{-2n^*_{\alpha'\beta'}}=\epsilon^{1-\frac{\kappa}{3}}e^{-2n^*_{\alpha'\beta'}}.$$

根据(2.14)，我们可以从以下两种情况考虑情形2)。

- 若$|\alpha'|+|\beta'|\geq 6$，则$\frac{\kappa}{2}(|\alpha_{\mathcal{J}}|+|\beta_{\mathcal{J}}|)+\frac{2}{3}\kappa(|\alpha|+|\beta|)\geq 3\kappa$且$\mathcal{E}\leq\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa-1}$。这说明(2.20)中$q^\alpha\bar{q}^\beta$的系数不会超过

$$\mathcal{E}|\tilde{R}_{\alpha'\beta'}|\leq\epsilon^{\frac{2}{3}\kappa-1}\cdot\epsilon^{1-\frac{\kappa}{3}}e^{-2n^*_{\alpha'\beta'}}\leq\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}e^{-2n^*_{\alpha'\beta'}}. \tag{2.22}$$

– 若$|\alpha'|+|\beta'|=4$，则根据(2.15)，$n^*_{\alpha'\beta'}>\kappa|\ln\epsilon|$，并且

$$|\tilde{R}_{\alpha'\beta'}|\le\epsilon^{1-\frac{\kappa}{3}}e^{-\kappa|\ln\epsilon|}e^{-n^*_{\alpha'\beta'}}=\epsilon^{1+\frac{2}{3}\kappa}e^{-n^*_{\alpha'\beta'}}.$$

因此，(2.20)中的系数不超过

$$\mathcal{E}|\tilde{R}_{\alpha'\beta'}|\le\epsilon^{-(1+\frac{7}{3}\kappa)}\epsilon^{2\kappa}\epsilon^{1+\frac{2}{3}\kappa}e^{-n^*_{\alpha'\beta'}}\le\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}e^{-n^*_{\alpha'\beta'}}.\tag{2.23}$$

因此，在情形2)下，(2.20)中$q^\alpha\bar{q}^\beta$的系数不超过

$$\left\|\mathcal{E}\tilde{R}_{\alpha'\beta'}\left(\prod_{n\in\mathcal{J}}\left(\sqrt{\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}I_n+\xi_n}\right)^{\alpha_n+\beta_n}e^{\mathrm{i}(\alpha_n-\beta_n)\theta_n}\right)\right\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}\le\epsilon^{\frac{\kappa}{4}}e^{-n^*_{\alpha'\beta'}}.$$

对$\sqrt{I_n+\xi_n}$在ξ_n附近展开时，我们需要让ξ_n稍稍偏离0以避免奇性。所以我们（在尺度变换后）在$[\epsilon^{\frac{\kappa}{12}},1]^b$中选取参数。

毫无疑问，$\breve{P}$的各项均在情形2)中产生，所以，根据基本事实$\mathrm{supp}(\alpha,\beta)\subset\mathrm{supp}(\alpha',\beta')$，可得

$$\|\breve{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}\le\epsilon^{\frac{\kappa}{4}}e^{-n^*_{\alpha'\beta'}}\le\epsilon^{\frac{\kappa}{4}}e^{-n^*_{\alpha\beta}}.$$

这蕴含了(2.10)。

$\acute{P}$的各项在两种情形中都会产生。当(2.20)中的项满足$\alpha_{\mathcal{J}}=\beta_{\mathcal{J}}$时，通过将$\sqrt{I_n+\xi_n}$在$\xi_n$附近展开，我们可通过角变量的相互抵消得到$\acute{P}$中的项

$$\mathcal{E}\tilde{R}_{\alpha'\beta'}\left(\prod_{n\in\mathcal{J}}\left(\sqrt{\xi_n}\right)^{\alpha_n+\beta_n}\right)q^\alpha\bar{q}^\beta.$$

如情形2)中估计得那样，相应的系数不超过$\epsilon^{\frac{\kappa}{4}}e^{-n^*_{\alpha\beta}}$。特别地，如果$|\alpha|+|\beta|\ge 3$，该上界可根据需要替换为$\epsilon^{\frac{\kappa}{4}}e^{-\frac{1}{2}(n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})}$。这是由于$\frac{1}{2}(n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})\le n^*_{\alpha\beta}$。结合(2.21)，我们就完成了(2.11)的证明。 □

根据(2.21) – (2.23)，可知

$$\|X_P\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s),\mathcal{O}}\le\varepsilon:=\epsilon^{\frac{\kappa}{8}}.$$

至此，(2.9)满足定理2.2要求的所有假设条件。由于它与(2.1)所对应的系统是相互共轭的，故定理2.1得证。

在命题2.1的证明过程中，我们直接应用了一些结论。现在我们就将其具体陈述，并给出必要的证明。第一个引理表明，如果

$$|i|,|j|,|m|,|n| \le \kappa|\ln\epsilon|, \quad \{i,m\} \ne \{j,n\},$$

那么函数

$$V_{i,j,m,n}(x) = \hat{V}(x+i\tilde{\alpha}) - \hat{V}(x+j\tilde{\alpha}) + \hat{V}(x+m\tilde{\alpha}) - \hat{V}(x+n\tilde{\alpha})$$

在$\mathcal{X}$上不会恒为零。

引理 2.1 对于充分小的ϵ，存在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的子集$\mathcal{X}_\epsilon$对某个$0<\vartheta<1$满足

$$\mathrm{mes}(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_\epsilon) < \epsilon^{\vartheta},$$

使得对任意$|i|,|j|,|m|,|n| \le \kappa|\ln\epsilon|$且$\{i,m\} \ne \{j,n\}$，有

$$|V_{i,j,m,n}(x)| \ge \epsilon^{\frac{1}{4}}, \quad \forall x \in \mathcal{X}_\epsilon. \tag{2.24}$$

引理2.1的证明与[22]中的附录A很相似，其中的测度估计部分则与[33]中的引理5.3类似。为保持论文的完整性，我们在附录五给出具体的证明。

下一个引理表明，有关Hamilton函数系数的性质(2.7)关于Poisson括号是封闭的。

引理 2.2 考虑两个实解析函数[5]

$$G(q_{\mathbb{Z}},\bar{q}_{\mathbb{Z}}) = \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha\beta} q_{\mathbb{Z}}^{\alpha} \bar{q}_{\mathbb{Z}}^{\beta}, \quad F(q_{\mathbb{Z}},\bar{q}_{\mathbb{Z}}) = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ n_{\alpha\beta}^{+}-n_{\alpha\beta}^{-} \le M}} F_{\alpha\beta} q_{\mathbb{Z}}^{\alpha} \bar{q}_{\mathbb{Z}}^{\beta},$$

满足

$$|G_{\alpha\beta}| \le c_G e^{-\sigma(n_{\alpha\beta}^{+}-n_{\alpha\beta}^{-})}, \quad |F_{\alpha\beta}| \le c_F e^{-\sigma(n_{\alpha\beta}^{+}-n_{\alpha\beta}^{-})},$$

其中$c_G, c_F, \sigma > 0$。我们有

$$K(q_{\mathbb{Z}},\bar{q}_{\mathbb{Z}}) = \mathrm{i}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\partial_{q_n} F \cdot \partial_{\bar{q}_n} G - \partial_{\bar{q}_n} F \cdot \partial_{q_n} G) = \sum_{\alpha,\beta} K_{\alpha\beta} q_{\mathbb{Z}}^{\alpha} \bar{q}_{\mathbb{Z}}^{\beta}$$

满足

$$|K_{\alpha\beta}| \le c \cdot M^2 c_G c_F e^{-\sigma(n_{\alpha\beta}^{+}-n_{\alpha\beta}^{-})}.$$

[5]为符号表示方便，此处我们用(α,β) 代替(α',β')来表示$(\alpha_n,\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 。

证明：通过直接计算，可得

$$K_{\alpha\beta} = \mathrm{i}\sum_{\mathcal{S}}\left(G_{\check\alpha+e_n,\check\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n} - G_{\check\alpha,\check\beta+e_n}F_{\hat\alpha+e_n,\hat\beta}\right), \tag{2.25}$$

其中的求和符号为

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{array}{l} n\in\mathbb{Z},\quad (\check\alpha,\check\beta)+(\hat\alpha,\hat\beta)=(\alpha,\beta), \\ n^+_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n} - n^-_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n} \le M \quad \text{or} \quad n^+_{\hat\alpha+e_n,\hat\beta} - n^-_{\hat\alpha+e_n,\hat\beta} \le M \end{array}\right\}.$$

对于(2.25)中的$G_{\check\alpha+e_n,\check\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}$，注意到

$$n^+_{\alpha\beta} \le \max\{n^+_{\check\alpha+e_n,\check\beta}, n^+_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\},\quad n^-_{\alpha\beta} \ge \max\{n^-_{\check\alpha+e_n,\check\beta}, n^-_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\},$$

那么

$$n^+_{\check\alpha+e_n,\check\beta} - n^-_{\check\alpha+e_n,\check\beta} + n^+_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n} - n^-_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n} \ge n^+_{\alpha\beta} - n^-_{\alpha\beta}.$$

因此，

$$|G_{\check\alpha+e_n,\check\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}| \le c_G c_F e^{-\rho(n^+_{\check\alpha+e_n,\check\beta}-n^-_{\check\alpha+e_n,\check\beta})}e^{-\rho(n^+_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}-n^-_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n})} \le c_G c_F e^{-\rho(n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})}.$$

对(2.25)中的$G_{\check\alpha,\check\beta+e_n}F_{\hat\alpha+e_n,\hat\beta}$做同样的处理，并由$\mathcal{S}$的定义可知$K_{\alpha\beta}$为一有限和，该引理的证明到此完成。 □

§2.4 KAM迭代

本章余下的部分旨在证明抽象KAM定理2.2。在这一部分，我们将对应用于Hamilton系统(2.3)的KAM迭代进行细致的刻划。这是通过一列辛坐标变换来实现的，我们将证明，随着辛坐标变换的不断作用，在损失部分参数与指数权的前提下，扰动较上一步会更小。在下一部分，我们会验证辛坐标变换序列的收敛性，并进行相应的测度估计，进而完成定理2.2的证明。

§2.4.1 标准型

为进行KAM步骤，我们须将Hamilton函数(2.3)化为具有便于迭代的标准型的形式。方便起见，在得到标准型过程中，我们只给出大致的框架。变换的构造以及估计都与一般KAM步骤中的相类似，会在随后具体呈现出。

在KAM迭代开始之前，令$r_0=\frac{r}{2}$, $\varepsilon_0=\varepsilon^{\frac{5}{4}}$以及$K_0=2|\ln\varepsilon|\rho^{-1}$, $\rho_0=K_0^{-1}$。选取足够小的s_0满足$0<s_0<\min\{\varepsilon_0,s\}$，并定义$\mathcal{D}_0=\mathcal{D}_{d,\rho_0}(r_0,s_0)$。

我们先考虑$\breve{P}$和$\acute{P}$中的低次项。根据**(A4)**中的(2.4)和(2.5)以及范数定义(2.2)，可得

$$\breve{P} = \sum_{\substack{(k,l)\neq 0\\ \alpha,\beta}} P_{kl\alpha\beta} I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} q^\alpha \bar{q}^\beta, \quad \acute{P} = \sum_{\alpha,\beta} P_{00\alpha\beta} q^\alpha \bar{q}^\beta$$

满足

$$|P_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} \le \varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}} e^{-|k|r}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^b, \;\; 2|l| + |\alpha| + |\beta| \le 2. \tag{2.26}$$

将P分解为$R + (P - R)$，其中

$$R := \sum_{\substack{n^*_{\alpha\beta} \le K_0\\ 2|l|+|\alpha|+|\beta|\le 2}} P_{kl\alpha\beta} e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} q^\alpha \bar{q}^\beta,$$

那么

$$P - R = \sum_{\substack{k,l,n^*_{\alpha\beta} > K_0\\ 1\le 2|l|+|\alpha|+|\beta|\le 2}} P_{kl\alpha\beta} e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l q^\alpha \bar{q}^\beta + \sum_{\substack{k,l\\ 2|l|+|\alpha|+|\beta|\ge 3}} P_{kl\alpha\beta} e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l q^\alpha \bar{q}^\beta.$$

由(2.26)以及向量场范数的定义，可知当s_0足够小时，

$$\|X_{P-R}\|_{\mathcal{D}_0,\mathcal{O}} \le \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{5}{4}}.$$

我们可将R写成

$$\begin{aligned} R \;\; = \;\; & \sum_{\substack{k\\ |l|\le 1}} P_{kl00} e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l + \sum_{\substack{k\\ |n|\le K_0}} (P_n^{k10} q_n + P_n^{k01} \bar{q}_n) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} \\ & + \sum_{\substack{k\\ |m|,|n|\le K_0}} (P_{mn}^{k20} q_m q_n + P_{mn}^{k11} q_m \bar{q}_n + P_{mn}^{k02} \bar{q}_m \bar{q}_n) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}, \end{aligned}$$

此处

$$\begin{aligned} & P_n^{k10} := P_{k0e_n0}, \qquad P_n^{k01} := P_{k00e_n}, \\ & P_{mn}^{k20} := P_{kl(e_m+e_n)0}, \quad P_{mn}^{k11} := P_{kle_me_n}, \quad P_{mn}^{k02} := P_{kl0(e_m+e_n)}. \end{aligned}$$

如假设条件**(A5)**所示，P的规范不变性蕴含了对任意$m, n \in \mathbb{Z}_1$,

$$P_n^{010},\, P_n^{001},\, P_{mn}^{020},\, P_{mn}^{002} \equiv 0. \tag{2.27}$$

为控制R中的项，我们需要构造一个辛变换$\Phi_* = \Phi^1_{F_*}$，其中实解析Hamilton函数F_*形式为：

$$\begin{aligned} F_* \;\; = \;\; & \sum_{\substack{k\neq 0\\ |l|\le 1}} F_{kl00} I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} + \sum_{\substack{k\neq 0\\ |n|\le K_0}} (F_n^{k10} q_n + F_n^{k01} \bar{q}_n) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} \\ & + \sum_{\substack{k\neq 0\\ |m|,|n|\le K_0}} (F_{mn}^{k20} q_m q_n + F_{mn}^{k11} q_m \bar{q}_n + F_{mn}^{k02} \bar{q}_m \bar{q}_n) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}, \end{aligned}$$

而$\Phi^1_{F_*}$表示相应Hamilton相流的时间-1映射。该变换使得R的所有非共振项

$$
\begin{aligned}
&P_{kl00}I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}, \quad k\neq 0,\ |l|\leq 1,\\
&P_{k0\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}q^\alpha\bar{q}^\beta, \quad k\neq 0,\ n^*_{\alpha\beta}\leq K_0,\ 1\leq|\alpha|+|\beta|\leq 2,
\end{aligned}
$$

被消去，而

$$P_{0l00}I^l,\ \ |l|\leq 1;\quad P^{011}_{mn}q_m\bar{q}_n,\ \ |m|,|n|\leq K_0,$$

会被添加到新Hamilton函数的标准型部分。更确切地，我们将构造$\Phi^1_{F_*}$使得F_*满足同调方程

$$\{\mathcal{N},F_*\}+R=\sum_{|l|\leq 1}P_{0l00}I^l+\sum_{|m|,|n|\leq K_0}P^{011}_{mn}q_m\bar{q}_n.$$

我们可以证明，以上同调方程在参数集

$$\mathcal{O}_0=\left\{\xi\in\mathcal{O}:\begin{array}{l}|\langle k,\omega\rangle|\geq\frac{\gamma_0}{|k|^\tau},\\ |\langle k,\omega\rangle+\Omega_n|\geq\frac{\gamma_0}{|k|^\tau K_0^2},\\ |\langle k,\omega\rangle+\Omega_m+\Omega_n|\geq\frac{\gamma_0}{|k|^\tau K_0^4},\\ |\langle k,\omega\rangle+\Omega_m-\Omega_n|\geq\frac{\gamma_0}{|k|^\tau K_0^4},\end{array}\quad k\neq 0,\ \ |m|,|n|\leq K_0\right\}.$$

上是可解的。规范不变性所保证的(2.27)，使得我们不必考虑$|\Omega_n|$或$|\Omega_m\pm\Omega_n|$的下界。

参数集$\mathcal{O}_0$满足$|\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_0|=O(\gamma_0)$。实际上，由$\omega$和$\Omega_n$的假设条件，有

$$|\partial_\xi(\langle k,\omega\rangle+\Omega_m\pm\Omega_n)|\geq c|k|.$$

因此，通过去掉$\mathcal{O}$中测度为$O(\gamma_0)$的子集，条件

$$|\langle k,\omega\rangle+\Omega_m\pm\Omega_n|\geq\frac{\gamma_0}{|k|^\tau K_0^4}$$

即可满足。其他条件可以进行类似处理。

这样，变换Φ_*就将Hamilton函数(2.3)转化为$\mathcal{D}_0:=\mathcal{D}_{d,\rho_0}(r_0,s_0)$上的新系统

$$H_0=H\circ\Phi_*=\mathcal{N}_0+P_0.$$

$\mathcal{N}_0$和P_0形式分别为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_0&=e_0(\xi)+\langle\omega_0(\xi),I\rangle+\langle A_0(\xi)z_0,\bar{z}_0\rangle+\sum_{|n|>K_0}\Omega_n(\xi)q_n\bar{q}_n,\\
P_0&=\breve{P}_0+\acute{P}_0=\sum_{\alpha,\beta}\breve{P}^0_{\alpha\beta}(\theta,I,\xi)q^\alpha\bar{q}^\beta+\sum_{\alpha,\beta}\acute{P}^0_{\alpha\beta}(\xi)q^\alpha\bar{q}^\beta,
\end{aligned}
$$

这里$z_0:=(q_n)_{|n|\le K_0}$, $\bar z_0:=(\bar q_n)_{|n|\le K_0}$，而

$$
\begin{aligned}
&e_0(\xi)=e(\xi)+P_{0000}(\xi),\\
&\omega_0(\xi)=\omega(\xi)+P_{0l00(|l|=1)}(\xi),\\
&\langle A_0(\xi)z_0,\bar z_0\rangle=\sum_{|n|\le K_0}\Omega_n(\xi)q_n\bar q_n+\sum_{|m|,|n|\le K_0}P^{011}_{mn}(\xi)q_m\bar q_n.
\end{aligned}
$$

此外，P_0满足$\|X_{P_0}\|_{\mathcal{D}_0,\mathcal{O}_0}\le\varepsilon^{\frac54}=\varepsilon_0$，以及

$$
\|\breve P^0_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_0,\mathcal{O}_0}\le\begin{cases}\varepsilon_0e^{-\rho_0n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le2\\ e^{-\rho_0n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\ge3\end{cases},
$$

$$
\|\acute P^0_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_0,\mathcal{O}_0}\le\begin{cases}\varepsilon_0e^{-\rho_0n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le2\\ e^{-\rho_0(n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})}, & |\alpha|+|\beta|\ge3\end{cases}.
$$

在随后的部分中，我们会证明，该衰减性质在KAM迭代时是始终保持的。

假设我们进行到第ν个KAM步骤，考虑定义在$\mathcal{D}_\nu=\mathcal{D}_{d,\rho_\nu}(r_\nu,s_\nu)$上，且$C^1_W$地依赖于$\xi\in\mathcal{O}_\nu$（$\mathcal{O}_\nu\subset\mathcal{O}_0$为某参数集）的实解析Hamilton函数$H_\nu=\mathcal{N}_\nu+P_\nu$，其中$\mathcal{N}_\nu$和$P_\nu$形式分别为

$$
\begin{aligned}
N_\nu&=e_\nu(\xi)+\langle\omega_\nu(\xi),I\rangle+\langle A_\nu(\xi)z_\nu,\bar z_\nu\rangle+\sum_{|n|>K_\nu}\Omega_n(\xi)q_n\bar q_n,\\
P_\nu&=\breve P_\nu+\acute P_\nu=\sum_{\alpha,\beta}\breve P^\nu_{\alpha\beta}(\theta,I,\xi)q^\alpha\bar q^\beta+\sum_{\alpha,\beta}\acute P^\nu_{\alpha\beta}(\xi)q^\alpha\bar q^\beta,
\end{aligned}
$$

其中$z_\nu=(q_n)_{|n|\le K_\nu}$, $\bar z_\nu=(\bar q_n)_{|n|\le K_\nu}$。此外$P_\nu$满足$\|X_{P_\nu}\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}<\varepsilon_\nu$以及

$$
\|\breve P^\nu_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\le\begin{cases}\varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le2\\ e^{-\rho_\nu n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\ge3\end{cases}, \tag{2.28}
$$

$$
\|\acute P^\nu_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\le\begin{cases}\varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le2\\ e^{-\rho_\nu(n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})}, & |\alpha|+|\beta|\ge3\end{cases}. \tag{2.29}
$$

我们将构造新的参数集$\mathcal{O}_{\nu+1}\subset\mathcal{O}_\nu$以及辛变换$\Phi_\nu:\mathcal{D}_{\nu+1}\to\mathcal{D}_\nu$，使得下一个KAM步骤中的Hamilton函数$H_{\nu+1}=H_\nu\circ\Phi_\nu=\mathcal{N}_{\nu+1}+P_{\nu+1}$具有与$H_\nu$相似的性质，$C^1_W$地依赖于$\xi\in\mathcal{O}_{\nu+1}$，且

$$
\|X_{P_{\nu+1}}\|_{\mathcal{D}_{\nu+1},\mathcal{O}_{\nu+1}}\le\varepsilon_\nu^{\frac54}=\varepsilon_{\nu+1}.
$$

从现在起，为简化符号，我们去掉第ν步数量中的下标（或上标）“ν”，并且用下标（或上标）“$+$”表示第$\nu+1$步中的数量。此外，在本文余下部分中，我们默认，被标记为$c, c_0, c_1, \cdots$的常数都是正的且不依赖于迭代步骤。

令$K_+ = 2|\ln\varepsilon|K$。在如下的KAM步骤中变量$(q_n, \bar{q}_n)_{K<|n|\le K_+}$将被添加到新的变量$z_+, \bar{z}_+$中。为了在随后解同调方程时便于计算，我们将标准型$\mathcal{N}$写成如下形式

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= e(\xi) + \langle\omega(\xi), I\rangle + \langle A(\xi)z, \bar{z}\rangle + \sum_{K<|n|\le K_+}\Omega_n(\xi)q_n\bar{q}_n + \sum_{|n|>K_+}\Omega_n(\xi)q_n\bar{q}_n \\ &= e(\xi) + \langle\omega(\xi), I\rangle + \langle\tilde{A}(\xi)z_+, \bar{z}_+\rangle + \sum_{|n|>K_+}\Omega_n(\xi)q_n\bar{q}_n,\end{aligned}$$

此处，$z_+ = (q_n)_{|n|\le K_+}$，$\bar{z}_+ = (\bar{q}_n)_{|n|\le K_+}$。而满足$\dim(\tilde{A}) \le 2K_+ + 1$的Hermitian矩阵$\tilde{A}$可被形式地写为

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \Omega_n \end{pmatrix}_{K<|n|\le K_+}. \tag{2.30}$$

§2.4.2 截断与同调方程

将$\breve{P}$与$\acute{P}$分别展开为以下Taylor-Fourier级数的形式：

$$\breve{P} = \sum_{\substack{(k,l)\ne 0\\ \alpha,\beta}} P_{kl\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}I^l q^\alpha \bar{q}^\beta, \quad \acute{P} = \sum_{\alpha,\beta} P_{00\alpha\beta}q^\alpha\bar{q}^\beta.$$

根据(2.28)与(2.29)，以及范数$\|\cdot\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}$的定义，

$$|P_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}} \le \varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}e^{-|k|r}, \quad \forall k\in\mathbb{Z}^b, \ \ 2|l|+|\alpha|+|\beta|\le 2. \tag{2.31}$$

联系到标准型$\mathcal{N}$中的项，令R为P的如下截断:

$$R(\theta, I, z_+, \bar{z}_+) = \sum_{\substack{2|l|+|\alpha|+|\beta|\le 2\\ n^*_{\alpha\beta}\le K_+}} P_{kl\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}I^l q^\alpha\bar{q}^\beta = R_0 + R_1 + R_2,$$

其中

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \sum_{\substack{k\\|l|\le 1}} P_{kl00}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l,\\
R_1 &= \sum_{\substack{k\\|n|\le K_+}} (P_n^{k10}q_n + P_n^{k01}\bar{q}_n)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} = \sum_k (\langle R^{k10}, z_+\rangle + \langle R^{k01}, \bar{z}_+\rangle)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}\\
R_2 &= \sum_{\substack{k\\|m|,|n|\le K_+}} (P_{mn}^{k20}q_m q_n + P_{mn}^{k11}q_m\bar{q}_n + P_{mn}^{k02}\bar{q}_m\bar{q}_n)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}\\
&= \sum_k (\langle R^{k20}z_+, z_+\rangle + \langle R^{k11}z_+, \bar{z}_+\rangle + \langle R^{k02}\bar{z}_+, \bar{z}_+\rangle)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}.
\end{aligned}
$$

此处R^{k10}, R^{k01}, R^{k20}, R^{k11}, R^{k02}为

$$
\begin{aligned}
&R^{k10} := \left(P_n^{k10}\right)_{|n|\le K_+}, \qquad R^{k01} := \left(P_n^{k01}\right)_{|n|\le K_+},\\
&R^{k20} := \left(P_{mn}^{k20}\right)_{|m|,|n|\le K_+}, \quad R^{k11} := \left(P_{mn}^{k11}\right)_{|m|,|n|\le K_+}, \quad R^{k01} := \left(P_{mn}^{k01}\right)_{|m|,|n|\le K_+}.
\end{aligned}
$$

由于$\bar{P} = P$，很明显，

$$
\begin{aligned}
&\overline{P_{(-k)l00}} = P_{kl00}, \quad \overline{R^{(-k)10}} = R^{k01}, \quad \overline{R^{(-k)01}} = R^{k10},\\
&\overline{R^{(-k)20}} = R^{k02}, \quad \overline{R^{(-k)11}}^{\top} = R^{k11}, \quad \overline{R^{(-k)02}} = R^{k20}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

由范数的定义可知，

$$
\|X_R\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} \le \|X_P\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} \le \varepsilon.
$$

令$\rho_+ = K_+^{-1}$, $r_+ = \frac{r}{2} + \frac{r_0}{4}$以及$\eta = \varepsilon^{\frac{1}{4}}$。由于

$$
P - R = \sum_{\substack{k,l\\2|l|+|\alpha|+|\beta|\ge 3}} P_{kl\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l q^\alpha \bar{q}^\beta + \sum_{\substack{k,l,\,n_{\alpha\beta}^* > K_+\\2|l|+|\alpha|+|\beta|\le 2}} P_{kl\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l q^\alpha \bar{q}^\beta, \tag{2.33}
$$

再结合(2.31)，可知存在$c_1 > 0$使得

$$
\|X_{P-R}\|_{\mathcal{D}_{d,\rho_+}(r_+ + \frac{r-r_+}{2}, \eta s),\mathcal{O}} \le \varepsilon \sum_{|n|>K_+} e^{-\rho|n|} + c_1\eta s \le \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{5}{4}}, \tag{2.34}
$$

如果

(C1)： $e^{-(\rho-\rho_+)K_+} \le \frac{1}{8}\varepsilon^{\frac{1}{4}}$，且$c_1 s \le \frac{1}{8}\varepsilon$。

接下来，我们将构造$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_{d,\rho_+}(r_+, s_+)$上的Hamilton函数$F$，使得Hamilton向量场$X_F$对应的时间$-1$映射$\Phi = \Phi_F^1$可将$H$转化为$\mathcal{D}_+$上Hamilton函数$H_+$。假设$F$可以分解为

$$F(\theta, I, z_+, \bar{z}_+) \;=\; F_0 + F_1 + F_2,$$

其中

$$\begin{aligned}
F_0 &= \sum_{\substack{k\neq 0\\ |l|\leq 1}} F_{kl00} e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l,\\
F_1 &= \sum_{\substack{k\neq 0\\ |n|\leq K_+}} (F_n^{k10} q_n + F_n^{k01}\bar{q}_n) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} =: \sum_{k\neq 0} (\langle F^{k10}, z_+\rangle + \langle F^{k01}, \bar{z}_+\rangle) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle},\\
F_2 &= \sum_{\substack{k\neq 0\\ |m|,|n|\leq K_+}} (F_{mn}^{k20} q_m q_n + F_{mn}^{k11} q_m \bar{q}_n + F_{mn}^{k02}\bar{q}_m\bar{q}_n) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}\\
&=: \sum_{k\neq 0} (\langle F^{k20} z_+, z_+\rangle + \langle F^{k11} z_+, \bar{z}_+\rangle + \langle F^{k02}\bar{z}_+, \bar{z}_+\rangle) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle},
\end{aligned}$$

且对于$e' = P_{0000}$, $\omega' = P_{0l00}(|l| = 1)$满足同调方程

$$\{\mathcal{N}, F\} + R = e' + \langle \omega', I\rangle + \langle R^{011} z_+, \bar{z}_+\rangle. \tag{2.35}$$

经过简单的系数比较，可知方程(2.35)等价于系统（对每个$k\neq 0$以及$|l|\leq 1$）:

$$\langle k,\omega\rangle F_{kl00} = \mathrm{i}P_{kl00}, \tag{2.36}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I - \tilde{A})F^{k10} = \mathrm{i}R^{k10}, \tag{2.37}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I + \tilde{A})F^{k01} = \mathrm{i}R^{k01}, \tag{2.38}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I - \tilde{A})F^{k20} - F^{k20}\tilde{A} = \mathrm{i}R^{k20}, \tag{2.39}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I - \tilde{A})F^{k11} + F^{k11}\tilde{A} = \mathrm{i}R^{k11}, \tag{2.40}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I + \tilde{A})F^{k02} + F^{k02}\tilde{A} = \mathrm{i}R^{k02}. \tag{2.41}$$

由于$\tilde{A}$是一个Hermite矩阵，则存在正交矩阵Q使得

$$Q^*\tilde{A}Q = \Lambda := \mathrm{diag}\{\mu_j\}_{|j|\leq K_+},$$

此处μ_j为$\tilde{A}$的特征值。此外，根据(2.30)，我们可用$|j|\leq K$标记A的特征值，而对$K < |j| \leq K_+$，令$\mu_j = \Omega_j$。由$\tilde{A}$的分块对角结构，可知

$$Q_{mn} \equiv 0, \quad |m-n| > 2K+1. \tag{2.42}$$

实际上，$\tilde{A}$的对角化过程即为A的对角化过程。

定义新的参数集$\mathcal{O}_+ \subset \mathcal{O}$如下

$$\mathcal{O}_+ := \left\{ \xi \in \mathcal{O} : \begin{array}{l} |\langle k,\omega\rangle| > \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \\ |\langle k,\omega\rangle I + \mu_n| > \frac{\gamma}{|k|^\tau K_+^2}, \\ |\langle k,\omega\rangle I + \mu_m + \mu_n| > \frac{\gamma}{|k|^\tau K_+^4}, \\ |\langle k,\omega\rangle I + \mu_m - \mu_n| > \frac{\gamma}{|k|^\tau K_+^4}, \end{array} \quad k \neq 0, \ \ |m|,|n| \leq K_+ \right\}.$$

与§2.4.1中$\mathcal{O}_0$的构造相同，我们根据P的规范不变性而不需考虑$|\mu_n|$或$|\mu_m \pm \mu_n|$的下界。

很明显，方程(2.36)在此区域中可解。至于(2.37) – (2.41)，我们先对$k \neq 0$定义向量$\tilde{R}^{k10}$, $\tilde{R}^{k01}$以及矩阵$\tilde{R}^{k20}$, $\tilde{R}^{k11}$, $\tilde{R}^{k02}$：

$$\begin{aligned} &\tilde{R}^{k10} := Q^* R^{k10}, \quad \tilde{R}^{k01} := Q^* R^{k01}, \\ &\tilde{R}^{k20} := Q^* R^{k20} Q, \quad \tilde{R}^{k11} := Q^* R^{k11} Q, \quad \tilde{R}^{k02} := Q^* R^{k02} Q. \end{aligned}$$

考虑下列方程组

$$\begin{aligned} &(\langle k,\omega\rangle I - \Lambda)\tilde{F}^{k10} = \mathrm{i}\tilde{R}^{k10}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I + \Lambda)\tilde{F}^{k01} = \mathrm{i}\tilde{R}^{k01}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I - \Lambda)\tilde{F}^{k20} - \tilde{F}^{k20}\Lambda = \mathrm{i}\tilde{R}^{k20}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I - \Lambda)\tilde{F}^{k11} + \tilde{F}^{k11}\Lambda = \mathrm{i}\tilde{R}^{k11}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I + \Lambda)\tilde{F}^{k02} + \tilde{F}^{k02}\Lambda = \mathrm{i}\tilde{R}^{k02}. \end{aligned}$$

它们等价于在$\mathcal{O}_+$上可解的方程组

$$\begin{aligned} &(\langle k,\omega\rangle I - \mu_n)\tilde{F}_n^{k10} = \mathrm{i}\tilde{R}_n^{k10}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I + \mu_n)\tilde{F}_n^{k01} = \mathrm{i}\tilde{R}_n^{k01}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I - \mu_n - \mu_m)\tilde{F}_{mn}^{k20} = \mathrm{i}\tilde{R}_{mn}^{k20}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I - \mu_n + \mu_m)\tilde{F}_{mn}^{k11} = \mathrm{i}\tilde{R}_{mn}^{k11}, \\ &(\langle k,\omega\rangle I + \mu_n + \mu_m)\tilde{F}_{mn}^{k02} = \mathrm{i}\tilde{R}_{mn}^{k02}, \end{aligned}$$

其中$k \neq 0$, $|m|, |n| \leq K_+$。那么

$$\begin{aligned} &F^{k10} := Q\tilde{F}^{k10}, \quad F^{k01} := Q\tilde{F}^{k01}, \\ &F^{k20} := Q\tilde{F}^{k20}Q^*, \quad F^{k11} := Q\tilde{F}^{k11}Q^*, \quad F^{k02} := Q\tilde{F}^{k02}Q^* \end{aligned}$$

就分别为(2.37) – (2.41)的解。由(2.32)易知

$$\begin{aligned}
&\overline{F_{(-k)l00}} = F_{kl00}, \quad \overline{F^{(-k)10}} = F^{k01}, \qquad \overline{F^{(-k)01}} = F^{k10},\\
&\overline{F^{(-k)20}} = F^{k02}, \quad (F^{(-k)11})^* = F^{k11}, \quad \overline{F^{(-k)02}} = F^{k20}.
\end{aligned}$$

因此$\bar{F} = F$。

§2.4.3 坐标变换的性质

引理 2.3 F具有规范不变性，且对于充分小的ε，F的系数满足

$$|F_{kl00}|_{\mathcal{O}_+} \le \varepsilon^{\frac{5}{6}}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}, \tag{2.43}$$

$$|F_n^{k10}|_{\mathcal{O}_+}, |F_n^{k01}|_{\mathcal{O}_+} \le \varepsilon^{\frac{5}{6}}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}e^{-\rho|n|}, \tag{2.44}$$

$$|F_{mn}^{k20}|_{\mathcal{O}_+}, |F_{mn}^{k11}|_{\mathcal{O}_+}, |F_{mn}^{k02}|_{\mathcal{O}_+} \le \varepsilon^{\frac{5}{6}}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}, \tag{2.45}$$

$\forall\ k \ne 0,\ |l| \le 1$以及$|m|, |n| \le K_+$。

证明： 我们以F_{mn}^{k20}为例进行考虑，(2.44)和(2.45)中的各项可类似处理。根据以上的构造过程，我们可将F_{mn}^{k20}表达为

$$F_{mn}^{k20} = \mathrm{i}\sum_{\mathcal{F}} \frac{Q_{nn_1}Q^*_{n_1n_2}R^{k20}_{n_2n_3}Q_{n_3n_4}Q^*_{n_4m}}{\langle k,\omega\rangle - \mu_{n_1} - \mu_{n_4}}, \tag{2.46}$$

其中，根据(3.21)中Q的结构可知，

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{array}{l} |n_1|, |n_2|, |n_3|, |n_4| \le K_+, \\ |n_1 - n|,\ |n_2 - n_1| \le 2K+1, \quad |n_4 - m|,\ |n_3 - n_4| \le 2K+1 \end{array} \right\}.$$

那么，由(2.31)，

$$\sup_{\xi\in\mathcal{O}_+} |F_{mn}^{k20}(\xi)| \le c(\gamma^{-1}|k|^{\tau}K_+^4)K^4 e^{(2K+1)\rho}\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r}.$$

这里，我们应用了正交矩阵Q的性质，并用因子$e^{(2K+1)\rho}$使指数衰减性得以恢复。

为估计$|\partial_{\xi_j}F_{mn}^{k20}|$，我们对方程(2.39)两边关于$\xi_j$求导，$j = 1, 2, \cdots, b$。我们得到关于$\partial_{\xi_j}F^{k20}$的方程

$$(\langle k,\omega\rangle I - \tilde{A})(\partial_{\xi_j}F^{k20}) - (\partial_{\xi_j}F^{k20})\tilde{A} = G^{k20}_{\xi_j},$$

此处

$$G_{\xi_j}^{k20} := \mathrm{i}\partial_{\xi_j} R^{k20} + F^{k20}(\partial_{\xi_j}\tilde{A}) - [\partial_{\xi_j}(\langle k,\omega\rangle I - \tilde{A})]F^{k20}.$$

这一方程同样可通过利用Q将$\tilde{A}$对角化的方式解得。正如(2.46)一样，我们得到表达式

$$\partial_{\xi_j} F_{mn}^{k20} = \sum_{\mathcal{F}} \frac{Q_{nn_1}Q_{n_1n_2}^*(G_{\xi_j}^{k20})_{n_2n_3}Q_{n_3n_4}Q_{n_4m}^*}{\langle k,\omega\rangle - \mu_{n_1} - \mu_{n_4}}.$$

由R^{k20}的衰减性以及$\tilde{A}$的构造，我们有

$$\sup_{\xi\in\mathcal{O}_+} |(G_{\xi_j}^{k20})_{mn}| \le c(\gamma^{-1}|k|^{\tau+1}K_+^4)K^5 e^{(4K+2)\rho}\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r}.$$

因此，存在常数$c_2>0$使得

$$\begin{aligned}
&\sup_{\xi\in\mathcal{O}_+}(|F_{mn}^{k20}| + |\partial_\xi F_{mn}^{k20}|)\\
\le\ & c_2(\gamma^{-2}|k|^{2\tau+1}K_+^8)K^9 e^{(6K+3)\rho}\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r}\\
\le\ & \varepsilon^{\frac{5}{6}}|k|^{2\tau+1}e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r},
\end{aligned}$$

再由$\mathcal{O}_+$的定义，可知

$$|F_{kl00}|_{\mathcal{O}_+} \le |\langle k,\omega\rangle|^{-2}|k||P_{kl00}|_{\mathcal{O}_+} \le \gamma^{-2}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}\varepsilon, \quad k\neq 0,\ |l|\le 1.$$

因此(2.43) – (2.45)成立，如果

(C2)：$c_2\gamma^{-2}K_+^8K^9e^{(6K+3)\rho}\varepsilon^{\frac{1}{6}} \le 1$。

假设$\sum_{i=1}^b k_i+2\neq 0$，这就意味着$R^{k20}\equiv 0$。根据(2.46)中F_{mn}^{k20}的表达式，$F^{k20}\equiv 0$。对$F^{k11}, F^{k02}, F^{k10}, F^{k01}$做如上处理，即可得$F$的规范不变性。 □

我们将对X_F的范数进行估计，并在区域$\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{d,\rho_+}(r_+ + \frac{i}{4}(r-r_+), \frac{i}{4}s)$，$i=1,2,3,4$上，研究变换$\Phi_F^1$的性质。

引理 2.4 对于充分小的ε，我们有$\|X_F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+} \le \varepsilon^{\frac{4}{5}}$。

证明：根据(2.43) – (2.45)，可知

$$\frac{1}{s^2}\|\partial_\theta F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+},\ \|\partial_I F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+} \le c(r-r_+)^{-(2\tau+b+1)}\varepsilon^{\frac{5}{6}},$$

以及

$$
\begin{aligned}
& \sup_{\mathcal{D}_3} \frac{1}{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}_1} \left(\|\partial_{q_n} F\|_{\mathcal{O}_+} + \|\partial_{\bar{q}_n} F\|_{\mathcal{O}_+}\right) \langle n\rangle^d e^{\rho_+|n|} \\
\le\ & \sup_{\mathcal{D}_3} \frac{C}{s} \sum_{\substack{k\neq 0\\ |n|\le K_+}} \left(|F_n^{k10}|_{\mathcal{O}_+} + |F_n^{k01}|_{\mathcal{O}_+}\right) e^{|k|(r-\frac{1}{4}(r-r_+))} \langle n\rangle^d e^{\rho_+|n|} \\
& + \sup_{\mathcal{D}_3} \frac{C}{s} \sum_{\substack{k\neq 0\\ |m|,|n|\le K_+}} (|F_{mn}^{k20}|_{\mathcal{O}_+} + |F_{mn}^{k11}|_{\mathcal{O}_+} + |F_{mn}^{k02}|_{\mathcal{O}_+})|q_m| e^{|k|(r-\frac{1}{4}(r-r_+))} \langle n\rangle^d e^{\rho_+|n|} \\
\le\ & c(r-r_+)^{-(2\tau+b+1)} K_+^d e^{\rho_+ K_+} \varepsilon^{\frac{5}{6}}.
\end{aligned}
$$

将以上估计相结合，可得存在常数c_3使得

$$
\|X_F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+} \le c_3(r-r_+)^{-(2\tau+b+1)} K_+^d e^{\rho_+ K_+} \varepsilon^{\frac{5}{6}}.
$$

如果

(C3)： $c_3(r-r_+)^{-(2\tau+b+1)} K_+^d e^{\rho_+ K_+} \varepsilon^{\frac{1}{30}} \le 1$，

则引理3.2得证。 □

令$\mathcal{D}_{i\eta} := \mathcal{D}_{d,\rho_+}(r_+ + \frac{i}{4}(r-r_+), \frac{i}{4}\eta s)$, $i=1,2,3,4$。

引理 2.5 对于充分小的ε，有$\Phi_F^t : \mathcal{D}_{2\eta} \to \mathcal{D}_{3\eta}$，$-1\le t\le 1$。此外，

$$
\|D\Phi_F^t - I\|_{\mathcal{D}_{1\eta}} < 2\varepsilon^{\frac{4}{5}}.
$$

证明： 令

$$
\|D^m F\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}_+} \ =\ \max\left\{ \left\| \frac{\partial^{|i|+|l|+|\alpha|+|\beta|} F}{\partial\theta^i \partial I^l \partial(z_+)^\alpha \partial(\bar{z}_+)^\beta} \right\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}_+},\ |i|+|l|+|\alpha|+|\beta| = m \ge 2 \right\}.
$$

注意到F是I阶数为1且z_+, $\bar{z}_+$阶数为2的多项式。由引理2.4以及广义Cauchy不等式

$$
\|D^m F\|_{\mathcal{D}_2,\mathcal{O}_+} \ <\ \varepsilon^{\frac{4}{5}}, \quad \forall m\ge 2.
$$

利用积分方程

$$
\Phi_F^t \ =\ id\ +\int_0^t X_F \circ \Phi_F^s\, ds
$$

和引理2.4，易知$\Phi_F^t : \mathcal{D}_{2\eta} \to \mathcal{D}_{3\eta}$， $-1\le t\le 1$ 。此外，因为

$$
D\Phi_F^t \ =\ Id + \int_0^t (DX_F) D\Phi_F^s\, ds \ =\ Id + \int_0^t J(D^2F) D\Phi_F^s\, ds
$$

（这里J表示标准辛矩阵），所以

$$\|D\Phi_F^t - I\|_{\mathcal{D}_{1\eta}} \leq 2\|D^2F\|_{\mathcal{D}_{2\eta}} \leq 2\varepsilon^{\frac{4}{5}}.$$

□

§2.4.4 新Hamilton函数

令$\Phi = \Phi_F^1$, $s_+ = \dfrac{1}{8}\eta s$, $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_{d,\rho_+}(r_+, s_+)$ 以及

$$\mathcal{N}_+ = e_+ + \langle \omega_+, I\rangle + \langle A_+ z_+, \bar{z}_+\rangle + \sum_{|n|>K_+} \Omega_n q_n \bar{q}_n,$$

此处$e_+ = e + e'$, $\omega_+ = \omega + \omega'$, $A_+ = \tilde{A} + R^{011}$。那么$\Phi : \mathcal{D}_+ \to \mathcal{D}$，且

$$\begin{aligned}
H_+ &:= H \circ \Phi = (\mathcal{N} + R)\circ\Phi + (P - R)\circ\Phi \\
&= \mathcal{N} + \{\mathcal{N}, F\} + R + \int_0^1 (1-t)\{\{\mathcal{N}, F\}, F\}\circ\Phi_F^t\, dt \\
&\quad + \int_0^1 \{R, F\}\circ\Phi_F^t\, dt + (P - R)\circ\Phi_F^1 \\
&= \mathcal{N} + \{\mathcal{N}, F\} + R + P_+ \\
&= \mathcal{N}_+ + P_+ + \{\mathcal{N}, F\} + R - e' - \langle \omega', I\rangle - \langle R^{011} z_+, \bar{z}_+\rangle \\
&= \mathcal{N}_+ + P_+,
\end{aligned}$$

其中$P_+ = \displaystyle\int_0^1 \{(1-t)\{\mathcal{N}, F\} + R, F\}\circ\Phi_F^t\, dt + (P - R)\circ\Phi_F^1$。

$\mathcal{N}_+$具有和$\mathcal{N}$相似的性质。由$\tilde{A}^* = \tilde{A}$和$(R^{011})^* = R^{011}$，可知$A_+^* = A_+$，即A_+仍为Hermite矩阵。进一步，由$\check{P}$和$\acute{P}$的假设条件，我们有

$$|\omega_+ - \omega|_{\mathcal{O}_+} \leq \varepsilon, \quad |(A_+ - \tilde{A})_{mn}|_{\mathcal{O}_+} \leq \varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}. \tag{2.47}$$

令$R(t) = (1-t)(\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}) + tR$。那么$P_+$可表示为

$$\begin{aligned}
P_+ &= \int_0^1 (1-t)\{\{\mathcal{N}, F\}, F\}\circ\Phi_F^t\, dt + \int_0^1 \{R, F\}\circ\Phi_F^t dt + (P - R)\circ\Phi_F^1 \\
&= \int_0^1 \{R(t), F\}\circ\Phi_F^t\, dt + (P - R)\circ\Phi_F^1.
\end{aligned}$$

所以，$X_{P_+} = \int_0^1 (\Phi_F^t)^* X_{\{R(t),F\}}\, dt + (\Phi_F^1)^* X_{(P-R)}$。由引理2.5，

$$\|D\Phi_F^t\|_{\mathcal{D}_{1\eta}} \leq 1 + \|D\Phi_F^t - I\|_{\mathcal{D}_{1\eta}} \leq 2, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

进一步，根据引理A.3，

$$\|X_{\{R(t),F\}}\|_{\mathcal{D}_{2\eta}} \leq c\eta^{-2}\varepsilon^{\frac{9}{5}} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{5}{4}}.$$

结合(3.29)，$\|X_{P_+}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+} \leq \varepsilon^{\frac{5}{4}} = \varepsilon_+$。

注意到

$$\begin{aligned} P_+ &= P - R + \{P,F\} + \frac{1}{2!}\{\{\mathcal{N},F\},F\} + \frac{1}{2!}\{\{P,F\},F\} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\{\cdots\{\mathcal{N},\underbrace{F\}\cdots,F}_{n}\} + \frac{1}{n!}\{\cdots\{P,\underbrace{F\}\cdots,F}_{n}\} + \cdots. \end{aligned}$$

P_+的实解析性就很容易验证了。实际上，对分别满足$\bar{F}=F$和$\bar{G}=G$的任意两个函数F和G，它们的Poisson括号满足$\overline{\{F,G\}} = \{\overline{F},\overline{G}\} = \{F,G\}$。

根据引理A.4可知，规范不变性关于Poisson括号是封闭的，因此这一性质在KAM迭代过程中是始终保持的。我们只需再验证P_+的衰减性质即可。更确切地，若我们将P_+分解为$\breve{P}_+ + \acute{P}_+$，其中

$$\breve{P}_+ = \sum_{\alpha,\beta}\breve{P}^+_{\alpha\beta}(\theta,I;\xi)q^\alpha\bar{q}^\beta, \quad \acute{P}_+ = \sum_{\alpha,\beta}\acute{P}^+_{\alpha\beta}(\xi)q^\alpha\bar{q}^\beta,$$

我们将证明

$$\|\breve{P}^+_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+} \leq \begin{cases} \varepsilon_+ e^{-\rho_+ n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \leq 2 \\ e^{-\rho_+ n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \geq 3 \end{cases},$$

$$\|\acute{P}^+_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+} \leq \begin{cases} \varepsilon_+ e^{-\rho_+ n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \leq 2 \\ e^{-\rho_+ (n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})}, & |\alpha|+|\beta| \geq 3 \end{cases}.$$

对于(2.33)中$P-R$的项，我们有

$$\|\breve{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+} \leq e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, \ \|\acute{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+} \leq e^{-\rho(n^+_{\alpha\beta}-n^-_{\alpha\beta})}, \quad |\alpha|+|\beta| \geq 3.$$

若$|\alpha|+|\beta| \leq 2$，则根据**(C1)**以及$n^*_{\alpha\beta} > K_+$，

$$\|\breve{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+}, \|\acute{P}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+} \leq \varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}} \leq \varepsilon e^{-(\rho-\rho_+)K_+} \cdot e^{-\rho_+ n^*_{\alpha\beta}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon_+ e^{-\rho_+ n^*_{\alpha\beta}}.$$

此处我们应用了不等式$|I| \leq s_+ \leq \frac{1}{8}\varepsilon_+$去控制$|\alpha|+|\beta| \leq 2$但$2|l|+|\alpha|+|\beta| \geq 3$的情形。

余下各项都是由若干重Poisson括号组成，其衰减性质可由以下引理得到。

引理 2.6 对于充分小的ε，有

$$\|\{P,F\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_{3\eta},\mathcal{O}_+}\le\frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{1}{4}}\begin{cases}\varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le 2\\ e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\ge 3\end{cases}.$$

证明：通过直接计算可得

$$\{P,F\}_{\alpha\beta} = \mathrm{i}\sum_{\substack{|n|\le K_+\\(\breve\alpha,\breve\beta)+(\hat\alpha,\hat\beta)=(\alpha,\beta)}}\Big(P_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}-P_{\breve\alpha,\breve\beta+e_n}F_{\hat\alpha+e_n,\hat\beta}\Big) \tag{2.48}$$

$$+\sum_{(\breve\alpha,\breve\beta)+(\hat\alpha,\hat\beta)=(\alpha,\beta)}\Big\{P_{\breve\alpha\breve\beta},F_{\hat\alpha\hat\beta}\Big\}. \tag{2.49}$$

由引理2.3，我们知$\|F_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}$。

(1) (2.48)中的项

我们先考虑$P_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}$，它包含了$\breve P_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}$和$\acute P_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}$。根据$F$的构造，可知$|\hat\alpha|+|\hat\beta+e_n|=1$或2。

i) $|\alpha|+|\beta|\le 2$

在此情形下，

$$|\breve\alpha+e_n|+|\breve\beta|=|\alpha|+|\beta|+1-(|\hat\alpha|+|\hat\beta|)\le 3.$$

- 如果$|\breve\alpha+e_n|+|\breve\beta|\le 2$，那么，根据基本事实$n^*_{\alpha\beta}\le\max\{n^*_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta},\ n^*_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\}$可知

$$\begin{aligned}\|\breve P_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+},\ \|\acute P_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}F_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+} &\le \varepsilon e^{-\rho n^*_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}}\cdot\varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n^*_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}}\\ &\le \varepsilon^{\frac{9}{5}}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}.\end{aligned} \tag{2.50}$$

- 如果$|\breve\alpha+e_n|+|\breve\beta|=3$，则$P$的规范不变性蕴含了$\acute P_{\breve\alpha+e_n,\breve\beta}=0$。由$F$的构造可知，$P$的高次项转化为$\{P,F\}$（实际上只是$\{\breve P,F\}$）的低次项的唯一情形即为$(\hat\alpha,\hat\beta)=(0,0)$, $(\breve\alpha,\breve\beta)=(\alpha,\beta)$。由范数$\|X_F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}}$的定义以及$P$的衰减性，

$$\|\breve P_{\alpha+e_n,\beta}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}}\le e^{-\rho n^*_{\alpha+e_n,\beta}},\quad \|F_{0,e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le cs\varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho|n|}.$$

  因此，注意到$n^*_{\alpha\beta}\le\max\{n^*_{\alpha+e_n,\beta},\ |n|\}$，我们有

$$\|\breve P_{\alpha+e_n,\beta}F_{0,e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le cs\varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}\le c\varepsilon^{\frac{9}{5}}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}. \tag{2.51}$$

ii) $|\alpha|+|\beta|\geq 3$

在此情形中，$|\check{\alpha}+e_n|+|\check{\beta}|\geq 3$。与之前的论证类似，由

$$n_{\alpha\beta}^{*}\leq \max\{n_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}^{*},\, n_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}^{*}\},$$

或

$$n_{\alpha\beta}^{*}\leq n_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}^{+}-n_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}^{-}+n_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}^{*},$$

可得

$$\|\breve{P}_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}F_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\leq e^{-\rho n_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}^{*}}\cdot\varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}^{*}}\leq \varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}, \tag{2.52}$$

$$\|\acute{P}_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}F_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\leq e^{-\rho(n_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}^{+}-n_{\check{\alpha}+e_n,\check{\beta}}^{-})}\cdot\varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}^{*}}\leq \varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}. \tag{2.53}$$

对$P_{\check{\alpha},\check{\beta}+e_n}F_{\hat{\alpha}+e_n,\hat{\beta}}$做同样的处理，我们就完成了(2.48)中的项的估计。

(2) (2.49)中的项

由引理A.2以及不等式$n_{\alpha\beta}^{*}\leq\max\{n_{\check{\alpha}\check{\beta}}^{*},\,n_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^{*}\}$，可得

$$\|\{P_{\check{\alpha}\check{\beta}},F_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\}\|_{\mathcal{D}_{3\eta},\mathcal{O}_+}\leq c(r-r_+)^{-1}\eta^{-2}\begin{cases}\varepsilon^{\frac{9}{5}}e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ \varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases}. \tag{2.54}$$

结合(2.50) – (2.54)可知，存在$c_4>0$使得

$$\|\{P,F\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_{3\eta},\mathcal{O}_+}\leq c_4(r-r_+)^{-1}\eta^{-2}K_+^2\begin{cases}\varepsilon^{\frac{9}{5}}e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ \varepsilon^{\frac{4}{5}}e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases}.$$

如果
(C4)： $c_4(r-r_+)^{-1}K_+^2\varepsilon^{\frac{1}{20}}\leq\frac{1}{4}$，
则引理3.4得证。 □

对于$Y=P_+-(P-R)=\sum_{\alpha,\beta}Y_{\alpha\beta}q^{\alpha}\bar{q}^{\beta}$中由若干个Poisson括号作用而成的项，我们同样可对其进行如上的估计，并对充分小的ε得到

$$\|Y_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_+,\mathcal{O}_+}\leq\begin{cases}\frac{1}{2}\varepsilon_+e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ \varepsilon^{\frac{1}{5}}e^{-\rho n_{\alpha\beta}^{*}}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases}.$$

若我们将Y分解为$\breve{Y}+\acute{Y}$，其中

$$\breve{Y}=\sum_{\alpha,\beta}\breve{Y}_{\alpha\beta}(\theta,I;\xi)q^{\alpha}\bar{q}^{\beta},\quad \acute{Y}=\sum_{\alpha,\beta}\acute{Y}_{\alpha\beta}(\xi)q^{\alpha}\bar{q}^{\beta},$$

那么，应用基本事实$\frac{1}{2}(n^{+}_{\alpha\beta}-n^{-}_{\alpha\beta})\leq n^{*}_{\alpha\beta}$与$\rho_{+}<\frac{\rho}{2}$，可知

$$\|\breve{Y}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_{+},\mathcal{O}_{+}}\leq\begin{cases}\frac{1}{2}\varepsilon_{+}e^{-\rho_{+}n^{*}_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ \varepsilon^{\frac{1}{5}}e^{-\rho_{+}n^{*}_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases},$$

$$\|\acute{Y}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_{+},\mathcal{O}_{+}}\leq\begin{cases}\frac{1}{2}\varepsilon_{+}e^{-\rho_{+}n^{*}_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ \varepsilon^{\frac{1}{5}}e^{-\rho_{+}(n^{+}_{\alpha\beta}-n^{-}_{\alpha\beta})}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases}.$$

至此，我们就完成了一个KAM步骤。

§2.5 定理2.2的证明

令r_0, s_0, ρ_0, ε_0, γ_0, K_0, $\mathcal{O}_0$, H_0, $\mathcal{N}_0$, P_0如§2.4所定义的那样。对$\nu=1,2,\cdots$，定义如下序列：

$$\varepsilon_{\nu}=\varepsilon_{\nu-1}^{\frac{5}{4}}=\varepsilon_0^{\left(\frac{5}{4}\right)^{\nu}},\quad \eta_{\nu}=\varepsilon_{\nu}^{\frac{1}{4}},\quad \gamma_{\nu}=\varepsilon_{\nu}^{\frac{1}{16}},\quad K_{\nu}=2|\ln\varepsilon_{\nu-1}|K_{\nu-1},\quad \rho_{\nu}=K_{\nu}^{-1},$$

$$r_{\nu}=r_0\left(1-\sum_{i=2}^{\nu+1}2^{-i}\right),\quad s_{\nu}=\frac{1}{8}\eta_{\nu-1}s_{\nu-1}\;=\;2^{-3\nu}\left(\prod_{i=0}^{\nu-1}\varepsilon_i\right)^{\frac{1}{4}}s_0.$$

在$\mathcal{D}_{\nu}=\mathcal{D}_{d,\rho_{\nu}}(r_{\nu},s_{\nu})$上考虑$H_{\nu}=\mathcal{N}_{\nu}+P_{\nu}$，其中

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\nu} &= e_{\nu}(\xi)+\langle\omega_{\nu}(\xi),I\rangle+\langle A_{\nu}(\xi)z_{\nu},\bar{z}_{\nu}\rangle+\sum_{|n|>K_{\nu}}\Omega_n(\xi)q_n\bar{q}_n\\ &= e_{\nu}(\xi)+\langle\omega_{\nu}(\xi),I\rangle+\langle\tilde{A}_{\nu}(\xi)z_{\nu+1},\bar{z}_{\nu+1}\rangle+\sum_{|n|>K_{\nu+1}}\Omega_n(\xi)q_n\bar{q}_n,\\ P_{\nu} &= \breve{P}_{\nu}+\acute{P}_{\nu}=\sum_{\alpha,\beta}\breve{P}^{\nu}_{\alpha\beta}(\theta,I;\xi)q^{\alpha}\bar{q}^{\beta}+\sum_{\alpha,\beta}\acute{P}^{\nu}_{\alpha\beta}(\xi)q^{\alpha}\bar{q}^{\beta}\end{aligned}$$

此处$z_{\nu}=(q_n)_{|n|\leq K_{\nu}}$, $\bar{z}_{\nu}=(\bar{q}_n)_{|n|\leq K_{\nu}}$，且

$$\tilde{A}_{\nu}=\begin{pmatrix}A_{\nu} & 0\\ 0 & \Omega_n\end{pmatrix}_{K_{\nu}<|n|\leq K_{\nu+1}}.$$

我们以$\{\mu_j^\nu\}_{|j|\le K_{\nu+1}}$表示$\tilde{A}_\nu$的特征值，其中$A_\nu$的特征值为$\{\mu_j^\nu\}_{|j|\le K_\nu}$，而$\mu_j^\nu=\Omega_j$，$K_\nu<|j|\le K_{\nu+1}$。令

$$\mathcal{O}_{\nu+1}=\left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu:\begin{array}{l}|\langle k,\omega_\nu\rangle|>\frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau}\\ |\langle k,\omega_\nu\rangle+\mu_n^\nu|>\frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau K_{\nu+1}^2},\\ |\langle k,\omega_\nu\rangle+\mu_m^\nu+\mu_n^\nu|\le\frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau K_{\nu+1}^4},\\ |\langle k,\omega_\nu\rangle+\mu_m^\nu-\mu_n^\nu|\le\frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau K_{\nu+1}^4},\end{array}\quad k\neq 0,\ \ |m|,|n|\le K_{\nu+1}\right\}.$$

§2.5.1 迭代引理

之前的分析过程可总结为

引理 2.7 存在充分小的ε_0，使得对$\nu=0,1,\cdots$，有

(a) $H_\nu=\mathcal{N}_\nu+P_\nu$在$\mathcal{D}_\nu$是实解析的，$C_W^1$地依赖于$\xi\in\mathcal{O}_\nu$，并且

$$|\omega_{\nu+1}-\omega_\nu|_{\mathcal{O}_{\nu+1}},\quad |(A_{\nu+1}-\tilde{A}_\nu)_{mn}|_{\mathcal{O}_{\nu+1}}\le\varepsilon_\nu e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}.$$

此外，P具有规范不变性，且$\|X_{P_\nu}\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\le\varepsilon_\nu$，

$$\|\breve{P}_{\alpha\beta}^\nu\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\le\begin{cases}\varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu n_{\alpha\beta}^*}, & |\alpha|+|\beta|\le 2\\ e^{-\rho_\nu n_{\alpha\beta}^*}, & |\alpha|+|\beta|\ge 3\end{cases},$$

$$\|\acute{P}_{\alpha\beta}^\nu\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\le\begin{cases}\varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu n_{\alpha\beta}^*}, & |\alpha|+|\beta|\le 2\\ e^{-\rho_\nu(n_{\alpha\beta}^+-n_{\alpha\beta}^-)}, & |\alpha|+|\beta|\ge 3\end{cases}.$$

(b) 存在辛变换$\Phi_\nu:\mathcal{D}_{\nu+1}\to\mathcal{D}_\nu$ 满足

$$\|D\Phi_\nu-I\|_{\mathcal{D}_{\nu+1},\mathcal{O}_{\nu+1}}\le\varepsilon_\nu^{\frac{4}{5}},$$

使得$H_{\nu+1}=H_\nu\circ\Phi_\nu$。

证明： 令$c_0=e^{10}\max\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$。需要验证假设条件**(C1)** − **(C4)**，对$\nu=0,1,\cdots$都成立。注意到$r_\nu-r_{\nu+1}=\frac{r_0}{2^{\nu+2}}$以及$\rho_\nu K_\nu=1$，只需验证：
(D1)： $c_0s_\nu\le\varepsilon_\nu$，
(D2)： $c_0r_0^{-(2\tau+b+1)}2^{(\nu+2)(2\tau+b+1)}K_{\nu+1}^{d+20}\le\varepsilon_\nu^{-\frac{1}{30}}$，
对$\nu=0,1,\cdots$成立。

由s_0的选取，**(D1)**对$\nu=0$成立。假设它对某个ν成立，那么易知

$$c_0 s_{\nu+1} = 2^{-3}\varepsilon_\nu^{\frac{1}{4}} \cdot c_0 s_\nu < 2^{-3}\varepsilon_\nu^{\frac{1}{4}} \cdot \varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}.$$

因此(**D1**)对每个ν都成立。

至于**(D2)**，令ε_0足够小可得

$$c_0 r_0^{-(2\tau+b+1)} 2^{(2\tau+b+1)} (2K_0|\ln\varepsilon_0|)^{d+20} \le \varepsilon_0^{-\frac{1}{30}},$$

所以**(D2)**对$\nu=0$成立。由于对$\nu=0,1,\cdots$，

$$K_{\nu+1} = 2K_\nu|\ln\varepsilon_\nu| = 2^{\nu+1}K_0\prod_{i=0}^{\nu}|\ln\varepsilon_i| = K_0(2|\ln\varepsilon_0|)^{\nu+1}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{(\nu+1)\nu}{2}},$$

而$\varepsilon_\nu^{-\frac{1}{30}} = \left(\varepsilon_0^{-\frac{1}{30}}\right)^{\left(\frac{5}{4}\right)^\nu}$。这就意味着不等式**(D2)**的右边随$\nu$的增长远远快于左边。因此，(**D2**)成立。 □

§2.5.2 收敛性

定义$\Psi^\nu = \Phi_0\circ\Phi_1\circ\cdots\circ\Phi_{\nu-1}$，$\nu=1,2,\cdots$。以上的归纳引理表明$\Psi^\nu : \mathcal{D}_{\nu+1}\to\mathcal{D}_0$，以及

$$H_0\circ\Psi^\nu = H_\nu = \mathcal{N}_\nu + P_\nu, \quad \nu=1,2,\cdots.$$

令$\mathcal{O}_\varepsilon = \cap_{\nu=0}^{\infty}\mathcal{O}_\nu$。那么，利用引理2.5以及一些相关的标准命题（例如[34, 40]）可知，在$\mathcal{D}_{d,0}(\frac{1}{2}r_0,0)\times\mathcal{O}_\varepsilon$上$H_\nu, \mathcal{N}_\nu, P_\nu$ 以及Ψ^ν分别一致收敛于极限$H_\infty, \mathcal{N}_\infty, P_\infty$及$\Psi^\infty$。很明显，在此情形下，

$$\mathcal{N}_\infty = e_\infty + \langle\omega_\infty, I\rangle + \langle A_\infty z_\infty, \bar{z}_\infty\rangle.$$

由于$\varepsilon_\nu = \varepsilon_0^{\left(\frac{5}{4}\right)^\nu}$，则根据引理A.1可知，

$$X_{P^\infty}|_{\mathcal{D}_{d,0}(\frac{1}{2}r_0,0)\times\mathcal{O}_\varepsilon} \equiv 0.$$

因$H_0\circ\Psi^\nu = H_\nu$，所以

$$\Phi_{H_0}^t\circ\Psi^\nu = \Psi^\nu\circ\Phi_{H_\nu}^t,$$

其中Φ_H^t表示Hamilton向量场X_H的相流。Ψ^ν与X_{H_ν}的一致收敛性表明，

$$\Phi_{H_0}^t\circ\Psi^\infty = \Psi^\infty\circ\Phi_{H_\infty}^t$$

在$\mathcal{D}_{d,0}(\frac{1}{2}r_0, 0)\times\mathcal{O}_\varepsilon$上成立。因此，对所有$\xi\in\mathcal{O}_\varepsilon$

$$\Phi^t_{H_0}(\Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\})) = \Psi^\infty\Phi^t_{N_\infty}(\mathbb{T}^b\times\{\xi\}) = \Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\}).$$

从而可知$\Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\})$是原始的扰动Hamilton系统$H_0$在$\xi\in\mathcal{O}_\varepsilon$上的一个嵌入不变环面。此外，$\Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\})$所对应的频率$\omega_\infty(\xi)$较原频率$\omega(\xi)$稍有改变。

§2.5.3　测度估计

在KAM迭代的第ν步中，我们需要对$k\neq 0$去掉以下共振的参数集

$$\mathcal{R}^\nu_k := \mathcal{R}^{\nu 1}_k\bigcup\left(\bigcup_{|n|\le K_{\nu+1}}\mathcal{R}^{\nu 2}_{kn}\right)\bigcup\left(\bigcup_{|m|,|n|\le K_{\nu+1}}\mathcal{R}^{\nu 3}_{kmn}\right)\bigcup\left(\bigcup_{|m|,|n|\le K_{\nu+1}}\mathcal{R}^{\nu 4}_{kmn}\right),$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\nu 1}_k &:= \left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu : |\langle k,\omega_\nu\rangle| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau}\right\},\\
\mathcal{R}^{\nu 2}_{kn} &:= \left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu : |\langle k,\omega_\nu\rangle + \mu^\nu_n| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau K^2_{\nu+1}}\right\},\\
\mathcal{R}^{\nu 3}_{kmn} &:= \left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu : |\langle k,\omega_\nu\rangle + \mu^\nu_m - \mu^\nu_n| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau K^4_{\nu+1}}\right\},\\
\mathcal{R}^{\nu 4}_{kmn} &:= \left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu : |\langle k,\omega_\nu\rangle + \mu^\nu_m + \mu^\nu_n| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau K^4_{\nu+1}}\right\}.
\end{aligned}$$

很明显，$\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_\varepsilon\subseteq\bigcup_{\nu\ge 0}\bigcup_{k\neq 0}\mathcal{R}^\nu_k$。

作为Hermite矩阵$\tilde{A}_\nu$的特征值，$\{\mu^\nu_n\}_{|n|\le K_{\nu+1}}C^1_W$地依赖于$\xi$，且存在对应于$\mu^\nu_n$，同样$C^1_W$地依赖于$\xi$的标准正交特征向量$\psi^\nu_n$（详见，例如[13]）。我们有$\mu^\nu_n = \langle\tilde{A}_\nu\psi^\nu_n, \bar{\psi}^\nu_n\rangle$及

$$\partial_{\xi_j}\mu^\nu_n = \langle(\partial_{\xi_j}\tilde{A}_\nu)\psi^\nu_n, \bar{\psi}^\nu_n\rangle,\quad j = 1,\cdots,b.$$

由$\tilde{A}_\nu$的构造过程，结合估计(2.47)，可知对于集合$\mathcal{R}^{\nu 4}_{kmn}$有

$$|\partial_\xi(\langle k,\omega_\nu\rangle + \mu^\nu_m - \mu^\nu_n)| \ge |\partial_\xi\langle k,\omega_0\rangle| - \varepsilon_0^{\frac{1}{2}}|k| - \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = O(|k|).$$

对于$\mathcal{R}^{\nu 1}_k$，$\mathcal{R}^{\nu 2}_{kn}$，$\mathcal{R}^{\nu 3}_{kmn}$可进行类似处理，因此

$$\left|\mathcal{R}^{\nu 1}_k\bigcup\left(\bigcup_{|n|\le K_{\nu+1}}\mathcal{R}^{\nu 2}_{kn}\right)\bigcup\left(\bigcup_{|m|,|n|\le K_{\nu+1}}\mathcal{R}^{\nu 3}_{kmn}\right)\bigcup\left(\bigcup_{|m|,|n|\le K_{\nu+1}}\mathcal{R}^{\nu 4}_{kmn}\right)\right| \le \frac{c\gamma_\nu}{|k|^{\tau+1}}.$$

由于$\tau\ge b$，则

$$|\mathcal{O}\setminus\mathcal{O}_\varepsilon| \le \left|\bigcup_{\nu\ge 0}\bigcup_{k\neq 0}\mathcal{R}^\nu_k\right| \le c\sum_{\nu\ge 0}\sum_{k\neq 0}\frac{\gamma_\nu}{|k|^{\tau+1}} = c\sum_{\nu\ge 0}\gamma_\nu \sim \gamma_0 = \varepsilon_0^{\frac{1}{16}}.$$

第三章　一维非线性Schrödinger方程中的局域化

本章中，我们考虑格点Schrödinger方程

$$\mathrm{i}\dot{q}_n = \epsilon(q_{n+1} + q_{n-1}) + V(n\tilde{\alpha} + x)q_n + |q_n|^2 q_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

其中$\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$满足Diophantine条件(1.3)，而$V$是$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上一非常值实解析函数。

§3.1　结论的陈述

借助Eliasson[16]的KAM机制，即定理1.6，我们可构造一个抽象KAM定理，并利用它来证明方程(3.1)中对典型初值的局域化。从KAM角度来看，这一工作的主要难点为：

i) 不同于[19]中的模型，我们必须处理Hamilton函数中的二阶扰动项；

ii) 不同于[10]中采用的方法，我们的证明是通过传统的KAM方法得到，并且构造出KAM环面；

iii) 与第二章中的工作相比较，最大的困难就在于，该系统所对应的稠点谱线性算子有无穷多处共振存在。

定理 3.1 任取$\mathcal{J} = \{n_1, \cdots, n_b\} \subset \mathbb{Z}$，$b > 1$。假设初值$q_{\mathbb{Z}}(0) = (q_n(0))_{n\in\mathbb{Z}}$的支集为$\mathcal{J}$，并满足$q_{\mathbb{Z}}(0) \in [0,1]^b$。存在充分小的$\epsilon_* = \epsilon_*(V, \tilde{\alpha}, \mathcal{J})$，使得当$0 < \epsilon < \epsilon_*$时，以下结论对几乎处处的$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$成立。

存在*Cantor*集$\mathcal{O}_\epsilon = \mathcal{O}_\epsilon(x) \subset [0,1]^b$满足当$\epsilon \to 0$时$|[0,1]^b \setminus \mathcal{O}_\epsilon| \to 0$，使得当支集为$\mathcal{J}$的初值$q_{\mathbb{Z}}(0) \in \mathcal{O}_\epsilon$时，则方程*(3.1)*的解$q_{\mathbb{Z}}(t) = (q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$满足

$$\sup_t \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2d} |q_n(t)|^2 < \infty, \quad \forall d > 0.$$

此外，对每一$n \in \mathbb{Z}$，$q_n(t)$关于t是拟周期的。

注释 3.1 定理中所得到的拟周期解并不必是小振幅的。

注释 3.2 ϵ充分小的假设是必须的，否则以上结论即使是对线性问题也不能成立。这与随机位势的情形不同。

§3.2　一个抽象的无限维KAM定理及其应用

§3.2.1　KAM定理的陈述

我们仍采用§2.2.1中所定义的符号和范数。在某区域$\mathcal{D}=\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s)$上考虑扰动的Hamilton函数

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{N}+\breve{P}+P \\ &= e(x,\xi)+\langle\omega(x,\xi),I\rangle+\langle\Omega(x,\xi)q,\bar{q}\rangle+\breve{P}(q,\bar{q};x)+P(\theta,I,q,\bar{q};x,\xi). \quad (3.2)\end{aligned}$$

我们试图证明，对几乎处处的$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，以及"大多数"的参数$\xi\in\mathcal{O}=\mathcal{O}(x)$，只要$\|X_{\breve{P}+P}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}$足够小，$H$具有不变环面，且运动方程在该环面上的解在空间中始终具有良好的衰减性。方便起见，如果是对固定的x进行考虑，我们就省略该参数。

对频率ω,Ω以及扰动$\breve{P}+P$，我们假设以下条件成立。

(A1) 切频的非退化性：映射$\xi\to\omega(\xi)$ 是$\mathcal{O}$与其像之间的一个C^1_W微分同胚。

(A2) Ω的正则性：$\Omega=T+A+W$。

- T是如(1.6)中所定义的，不依赖ξ的对称矩阵。具体地说，

  $$T=\mathrm{diag}\{V(x+n\tilde{\alpha})\}_{n\in\mathbb{Z}}+\epsilon\Delta,$$

  V与$\tilde{\alpha}$也与(1.6)中的相同。

- A是一个不依赖ξ的Hermite矩阵，且对某$\hat{N}>0$满足

  $$|A_{mn}|\le\begin{cases} c, & |m|,|n|\le\hat{N} \\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}. \quad (3.3)$$

- W是C^1_W地依赖于$\xi\in\mathcal{O}$的Hermite矩阵，且对某个正的$p\ll 1$以及$\sigma\gg\rho$满足

  $$|W_{mn}|_{\mathcal{O}}\le\begin{cases} pe^{-\sigma\max\{|m|,|n|\}}, & |m|,|n|\le N \\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}. \quad (3.4)$$

此外，存在$\mathbb{Z}$的子集$\mathcal{J}$使得

$$\Omega_{mn} \equiv 0, \quad \{m,n\} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset. \tag{3.5}$$

(A3) $\breve{P}$的短程性：$\breve{P}(q,\bar{q}) = \sum_{|\alpha|=|\beta|\geq 2} \breve{P}_{\alpha\beta} q^{\alpha}\bar{q}^{\beta}$ 关于$q,\bar{q}$实解析，不依赖参数$\xi \in \mathcal{O}$，且

$$|\breve{P}_{\alpha\beta}| \leq e^{-\rho(n^{+}_{\alpha\beta}-n^{-}_{\alpha\beta})}, \quad |\alpha| = |\beta| \geq 2, \tag{3.6}$$

$$\partial_{q_n}\breve{P} = \partial_{\bar{q}_n}\breve{P} \equiv 0, \quad \forall n \in \mathcal{J}. \tag{3.7}$$

(A4) P的衰减性质：$P = \sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha\beta}(\theta, I; \xi) q^{\alpha}\bar{q}^{\beta}$关于$\theta, I, q, \bar{q}$实解析，$C^1_W$地依赖于参数$\xi \in \mathcal{O}$，且

$$\|P_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} \leq \begin{cases} \varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \leq 2 \\ e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \geq 3 \end{cases}, \tag{3.8}$$

$$\partial_{q_n}P = \partial_{\bar{q}_n}P \equiv 0, \quad \forall n \in \mathcal{J}. \tag{3.9}$$

(A5) P的规范不变性：对于$P = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^b, l\in\mathbb{N}^b \\ \alpha,\beta}} P_{kl\alpha\beta} I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} q^{\alpha}\bar{q}^{\beta}$，若$\sum_{j=1}^{b} k_j + |\alpha| - |\beta| \neq 0$，则$P_{kl\alpha\beta} \equiv 0$。

定理 3.2 *考虑(3.2)中满足*(**A1**) − (**A5**)*的Hamilton函数H。存在正的*

$$\varepsilon_* = \varepsilon_*(\omega, V, \tilde{\alpha}, \hat{N}, p, \sigma, N, r, s, d, \rho)$$

使得当$\|X_{\breve{P}+P}\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$时，对几乎处处的$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，都有一个Cantor集$\mathcal{O}_{\varepsilon} = \mathcal{O}_{\varepsilon}(x) \subset \mathcal{O}(x)$满足：当$\varepsilon \to 0$时，$|\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_{\varepsilon}| \to 0$，且如下结论成立。

(a) *存在C^1_W的映射$\tilde{\omega} : \mathcal{O}_{\varepsilon} \to \mathbb{R}^b$使得当$\varepsilon \to 0$时，$|\tilde{\omega} - \omega|_{\mathcal{O}_{\varepsilon}} \to 0$。*

(b) *存在关于θ解析且关于ξ是C^1_W的映射$\Psi : \mathbb{T}^b \times \mathcal{O}_{\varepsilon} \to \mathcal{D}_{d,0}(r/2, 0)$使得当$\varepsilon \to 0$时$\|\Psi - \Psi_0\|_{\mathcal{D}_{d,0}(r/2,0),\mathcal{O}_{\varepsilon}} \to 0$，此处$\Psi_0$为平凡的嵌入映射：*

$$\Psi_0 : \mathbb{T}^b \times \mathcal{O} \to \mathbb{T}^b \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}.$$

(c) *对任意$\theta \in \mathbb{T}^b$以及$\xi \in \mathcal{O}_{\varepsilon}$，$\Psi(\theta + \tilde{\omega}(\xi)t, \xi) = (\theta + \tilde{\omega}(\xi)t, I(t), q(t), \bar{q}(t))$是$H$所对应运动方程的一个$b$频拟周期解。*

(d) *对每一t，$q(t) = (q_n(t))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1_{d,0}(\mathbb{Z})$。*

注释 3.3 若H满足(**A1**) − (**A5**)，则对每一KAM步骤中的$Hamilton$函数，这些假设条件均成立（以合适的参数）。

§3.2.2 对于方程(3.1)的应用

考虑方程(3.1)，其相应的Hamilton函数为

$$H=\sum_{n\in\mathbb{Z}}V(x+n\tilde{\alpha})q_n\bar{q}_n+\epsilon\sum_{n\in\mathbb{Z}}\bar{q}_n(q_{n+1}+q_{n-1})+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|q_n|^4. \tag{3.10}$$

取定$\mathcal{J}=\{n_1,\cdots,n_b\}\subset\mathbb{Z}$，且$\mathbb{Z}_1=\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}$。令$\varepsilon=\epsilon^{\frac{1}{4}}$，其中$\epsilon$充分小使得

$$|n_i|\leq|\ln\varepsilon|=\frac{1}{4}|\ln\epsilon|,\quad i=1,\cdots,b.$$

我们对Hamilton函数(3.10)引入作用–角变量以及振幅参数

$$q_n=\sqrt{I_n+\xi_n}e^{\mathrm{i}\theta_n},\quad \bar{q}_n=\sqrt{I_n+\xi_n}e^{-\mathrm{i}\theta_n},\quad n\in\mathcal{J},$$

其中$(I,\theta)=(I_{n_1},\cdots,I_{n_b},\theta_{n_1},\cdots,\theta_{n_b})$是$(q_n,\bar{q}_n)_{n\in\mathcal{J}}$–空间中在$\xi$附近的标准作用–角变量，而$\xi=(\xi_{n_1},\cdots,\xi_{n_b})\in\mathcal{O}=[\epsilon^{\frac{1}{12}},1]^b\subset[0,1]^b$为振幅参数，$(q,\bar{q})=(q_n,\bar{q}_n)_{n\in\mathbb{Z}_1}$。那么Hamilton函数(3.10)转化为

$$H=\mathcal{N}(\theta,I,q,\bar{q};x,\xi)+\breve{P}(q,\bar{q})+P(\theta,I,q,\bar{q};\xi),$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\theta,I,q,\bar{q};x,\xi) &:= \sum_{n\in\mathcal{J}}(V(x+n\tilde{\alpha})\xi_n+\frac{1}{2}\xi_n^2)+\sum_{n\in\mathcal{J}}(V(x+n\tilde{\alpha})+\xi_n)I_n\\
&\quad +\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}V(x+n\tilde{\alpha})|q_n|^2+\epsilon\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}_1\\ n+1\in\mathbb{Z}_1,}}(\bar{q}_nq_{n+1}+q_n\bar{q}_{n+1}),\\
\breve{P}(q,\bar{q}) &:= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}|q_n|^4,\\
P(\theta,I,q,\bar{q};\xi) &:= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathcal{J}}I_n^2+\epsilon\sum_{\substack{m\in\mathcal{J},\,n\in\mathbb{Z}_1\\ |m-n|=1}}\sqrt{I_m+\xi_m}(e^{-\mathrm{i}\theta_m}q_n+e^{\mathrm{i}\theta_m}\bar{q}_n)\\
&\quad +\epsilon\sum_{\substack{m,\,n\in\mathcal{J}\\ |m-n|=1}}\sqrt{I_m+\xi_m}\sqrt{I_n+\xi_n}(e^{-\mathrm{i}(\theta_m-\theta_n)}+e^{\mathrm{i}(\theta_m-\theta_n)}).
\end{aligned}$$

在引入作用–角变量之后，我们发现原来(3.10)中线性算子T的结构被破坏了。为克服这一不利条件，我们向系统中添加b个变量$q'_{n_1},\cdots,q'_{n_b}$及其共轭$\bar{q}'_{n_1},\cdots,\bar{q}'_{n_b}$。由于没有任何歧义，我们省略新增变量的上标“$'$”，然后仍

用q表示$(q_n)_{n\in\mathbb{Z}}$。这样$\mathcal{N}$就被写作

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \sum_{n\in\mathcal{J}}(V(x+n\tilde{\alpha})\xi_n+\frac{1}{2}\xi_n^2)+\sum_{n\in\mathcal{J}}(V(x+n\tilde{\alpha})+\xi_n)I_n\\ &\quad+\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}V(x+n\tilde{\alpha})|q_n|^2+\sum_{n\in\mathcal{J}}V(x+n\tilde{\alpha})|q_n|^2\right]+\epsilon\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\bar{q}_nq_{n+1}+q_n\bar{q}_{n+1})\\ &\quad-\sum_{n\in\mathcal{J}}V(x+n\tilde{\alpha})|q_n|^2-\epsilon\sum_{\{n,n+1\}\cap\mathcal{J}\neq\emptyset}(\bar{q}_nq_{n+1}+q_n\bar{q}_{n+1})\\ &= e(x,\xi)+\langle\omega(x,\xi),I\rangle+\langle T(x)q,\bar{q}\rangle+\langle A(x)q,\bar{q}\rangle,\end{aligned}$$

其中$e(x,\xi):=\sum_{n\in\mathcal{J}}V(x+n\tilde{\alpha})\xi_n+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathcal{J}}\xi_n^2$，

$$\omega(x,\xi) := (V(x+n_1\tilde{\alpha})+\xi_{n_1},\cdots,V(x+n_b\tilde{\alpha})+\xi_{n_b}), \tag{3.11}$$

$$T_{mn}(x) := \begin{cases} V(x+m\tilde{\alpha}), & m=n\\ \epsilon, & m-n=\pm1\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}, \tag{3.12}$$

$$A_{mn}(x) := \begin{cases} -V(x+m\tilde{\alpha}), & m=n,\ m\in\mathcal{J}\\ -\epsilon, & m-n=\pm1,\ m\in\mathcal{J}\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}. \tag{3.13}$$

现在，在某适当的区域$\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s)$上，$\breve{P}+P$具有如下正则性：

引理 3.1 对于充分小的$\epsilon>0$以及$s=\frac{1}{8}\epsilon^{\frac{1}{4}}$，若$|I|<s^2$且$\|q\|_{d,\rho}<s$，则

$$\|X_{\breve{P}+P}\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s),\mathcal{O}}\le\epsilon^{\frac{1}{4}}=\varepsilon.$$

我们需要验证Hamilton函数$H=\mathcal{N}+\breve{P}+P$满足KAM定理的假设条件(**A1**)–(**A5**)，其中**(A3)**与**(A5)**是显而易见的。

(**A1**): 由于$\{V(x+n\tilde{\alpha})\}_{n\in\mathbb{Z}}$不依赖$\xi$，根据(3.11)可知$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\equiv I_{\mathcal{J}}$。因此**(A1)**成立。

(**A2**): 这里$W\equiv0$。根据(3.13)，很明显**(A2)**成立，其中$\hat{N}=\frac{1}{4}|\ln\epsilon|$。

(**A4**): 注意到在P的各项中，法坐标变量只有$(q_n,\bar{q}_n)$, $n\notin\mathcal{J}$, $n-1$或$n+1\in\mathcal{J}$, $\mathcal{J}\subset[-\hat{N},\hat{N}]=[-\frac{1}{4}|\ln\epsilon|,\frac{1}{4}|\ln\epsilon|]$，且其系数均不大于$\epsilon$。那么，由于$\rho\le\frac{1}{6}\hat{N}^{-1}$，且

$$c\epsilon^{1-\frac{1}{24}}\le\epsilon^{\frac{1}{4}}e^{-\rho\hat{N}},$$

(3.8)得以验证。

这样，定理3.1就是定理3.2的推论了。

§3.3 KAM迭代

为了对(3.2)进行KAM迭代，令$\mathcal{D}_0=\mathcal{D}_{d,\rho_0}(r_0,s_0)$, $\mathcal{O}_0$, H_0, P_0, $\varepsilon_0=\epsilon^{\frac{1}{4}}$, $\mathcal{N}_0$（包括e_0, ω_0, W_0, p_0, σ_0, N_0）为假设条件$(\mathbf{A1})-(\mathbf{A5})$中所给出的初始参数，并要求$\epsilon$小于定理1.6中给出的临界值$\epsilon_0$。

假设我们已经进行到了KAM迭代的第ν步，$\nu=0,1,2,\cdots$（一些参数序列已在(1.10)中定义）。我们在$\mathcal{D}_\nu:=\mathcal{D}_{d,\rho_\nu}(r_\nu,s_\nu)$和$\mathcal{O}_\nu$上考虑Hamilton函数

$$\begin{aligned} H_\nu &= \mathcal{N}_\nu+\breve{P}+P_\nu \\ &= e_\nu+\langle\omega_\nu,I\rangle+\langle\Omega_\nu q,\bar{q}\rangle+\breve{P}+P_\nu, \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中$\Omega_\nu=T+A+W_\nu$，且$(\mathbf{A1})-(\mathbf{A5})$成立，包括(3.3), (3.6), (3.7)以及

$$(\Omega_\nu)_{mn}\equiv 0,\quad \{m,n\}\cap\mathcal{J}\neq\emptyset, \tag{3.15}$$

$$|(W_\nu)_{mn}|_{\mathcal{O}_\nu}\le\begin{cases} p_\nu e^{-\sigma_\nu\max\{|m|,|n|\}}, & |m|,|n|\le N_\nu \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}, \tag{3.16}$$

$$\|(P_\nu)_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\le\begin{cases} \varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le 2 \\ e^{-\rho_\nu n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\ge 3 \end{cases}, \tag{3.17}$$

$$\partial_{q_n}P_\nu=\partial_{\bar{q}_n}P_\nu\equiv 0,\quad n\in\mathcal{J}. \tag{3.18}$$

此外，$\|X_{\breve{P}+P_\nu}\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\le\varepsilon_\nu$。

选取$r_{\nu+1}$使其满足$0<r_{\nu+1}<r_\nu$。令$J_\nu:=\left[\frac{5}{2}\varepsilon_\nu^{-\frac{a_\nu}{2}}\right]$，定义KAM子过程中的数量

$$\rho_\nu^{(j)}=(1-\frac{j}{2J_\nu})\rho_\nu,\quad r_\nu^{(j)}=r_\nu-\frac{j(r_\nu-r_{\nu+1})}{J_\nu},\quad s_\nu^{(j)}=2^{-3j}\varepsilon_\nu^{\frac{j}{5}}s_\nu,$$

以及$\mathcal{D}_\nu^{(j)}=\mathcal{D}_{d,\rho_{\nu+1}}(r_\nu^{(j)},s_\nu^{(j)})$, $\varepsilon_\nu^{(j)}=\varepsilon_\nu^{\frac{j}{5}+1}$, $j=0,1,\cdots,J_\nu$。我们的目的是构造子集$\mathcal{O}_{\nu+1}\subset\mathcal{O}_\nu$以及有限的一列变换

$$\Phi_\nu^{(j)}:\mathcal{D}_\nu^{(j)}\to\mathcal{D}_\nu^{(j-1)},\quad j=1,2,\cdots,J_\nu,$$

使得被转换到下一个KAM步骤的Hamilton函数

$$\begin{aligned} H_{\nu+1} &= H_\nu\circ\Phi_\nu^{(1)}\circ\cdots\circ\Phi_\nu^{(J_\nu)} \\ &= \mathcal{N}_{\nu+1}+\breve{P}+P_{\nu+1} \\ &= e_{\nu+1}+\langle\omega_{\nu+1},I\rangle+\langle\Omega_{\nu+1}q,\bar{q}\rangle+\breve{P}+P_{\nu+1} \end{aligned}$$

在$\mathcal{D}_{\nu+1}=\mathcal{D}_\nu^{(J_\nu)}$上以新的参数满足假设条件$(\mathbf{A1})-(\mathbf{A5})$。此外，

$$\|X_{\breve{P}+P_{\nu+1}}\|_{\mathcal{D}_{\nu+1},\mathcal{O}_{\nu+1}}\le\varepsilon_\nu^{(J_\nu)}\le\varepsilon_\nu^{\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{-a_\nu/2}}=\varepsilon_{\nu+1}.$$

§3.3.1 $\mathcal{O}_{\nu+1}$的构造

如定理1.6中所述，存在正交矩阵U_ν满足

$$|(U_\nu - I_{\mathbb{Z}})_{mn}| \le \varepsilon_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3}{2}\sigma_\nu |m-n|}, \tag{3.19}$$

使得$U_\nu^* T U_\nu = D_\nu + Z_\nu$，其中对称矩阵$Z_\nu$满足

$$|(Z_\nu)_{mn}| \le \varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu |m-n|}, \tag{3.20}$$

而对称矩阵D_ν可以通过正交矩阵Q_ν分块对角化，且Q_ν满足

$$(Q_\nu)_{mn} = 0, \quad |m-n| > N_\nu. \tag{3.21}$$

具体地，

$$\tilde{D}_\nu = Q_\nu^* D_\nu Q_\nu = \prod_j \tilde{D}^\nu_{\Lambda_j^\nu}, \quad \sharp\Lambda_j^\nu \le M_\nu, \ \ \mathrm{diam}\Lambda_j^\nu \le M_\nu N_\nu, \ \ \forall j.$$

为了描述$U_\nu^*\Omega_\nu U_\nu$，我们需要进一步考虑$U_\nu^* A U_\nu$和$U_\nu^* W_\nu U_\nu$。通过直接应用引理B.1，由(3.3), (3.16)和(3.19)可知，存在常数$c_1 > 0$使得

$$|\,(U_\nu^*(A+W_\nu)U_\nu)_{mn}\,|_{\mathcal{O}_\nu} \le c_1 \max\{\hat{N}^2 e^{3\sigma_\nu \hat{N}},\, p_\nu \sigma_\nu^{-2}\} \cdot e^{-\sigma_\nu \cdot \max\{|m|,\,|n|\}},$$

定义截断$\hat{A}_\nu$为

$$(\hat{A}_\nu)_{mn} := \begin{cases} (U_\nu^*(A+W_\nu)U_\nu)_{mn}\,, & |m|,|n| \le N_\nu \\ \qquad 0, & \text{o.w.} \end{cases}. \tag{3.22}$$

那么

$$\left|\Big(U_\nu^*(A+W_\nu)U_\nu - \hat{A}_\nu\Big)_{mn}\right|_{\mathcal{O}_\nu} \le \varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu \max\{|m|,\,|n|\}}, \tag{3.23}$$

如果

(C1)： $c_1 \max\{\hat{N}^2 e^{\frac{3}{2}\sigma_\nu \hat{N}},\, p_\nu \sigma_\nu^{-2}\} \cdot e^{-(\sigma_\nu - \rho_\nu)N_\nu} \le \varepsilon_\nu$。

令$K_{\nu+1} := N_{\nu+1} - (M_\nu + 1)N_\nu$，其中序列$M_\nu,\, N_\nu,\, \nu = 0, 1, \cdots$，如(1.10)中所定义，且

$$\tilde{D}^\nu_{\Lambda^\nu} := \prod_{\Lambda_j^\nu \subset \Lambda^\nu} \tilde{D}^\nu_{\Lambda_j^\nu}, \quad \tilde{A}_\nu := Q_\nu^* \hat{A}_\nu Q_\nu, \tag{3.24}$$

此处$\Lambda^\nu := \bigcup\{\Lambda_j^\nu : \Lambda_j^\nu \cap [-(K_{\nu+1} + N_\nu),\ \ K_{\nu+1} + N_\nu] \ne \emptyset\} \subset [-N_{\nu+1},\ \ N_{\nu+1}]$。根据(3.21)和(3.22)，可知

$$(\tilde{A}_\nu)_{mn} \equiv 0, \quad \max\{|m|,|n|\} > 2N_\nu.$$

由于$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}$和$\tilde{A}_\nu$都是Hermite矩阵，则存在正交矩阵$O_\nu$使得

$$O^*_\nu(\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu)O_\nu=\mathrm{diag}\{\mu^\nu_j\}_{j\in\Lambda^\nu},$$

其中$\{\mu^\nu_j\}_{j\in\Lambda^\nu}$为$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu$的特征值。由$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu$的分块对角结构可知，

$$(O_\nu)_{mn}\equiv 0,\quad |m-n|>2(M_\nu+2)N_\nu. \tag{3.25}$$

实际上，$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu$可表示为

$$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu=(\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda'_\nu}+\tilde{A}_\nu)\cdot\prod_{\Lambda^\nu_j\cap[-2N_\nu,2N_\nu]=\emptyset}\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu_j}$$

其中$\Lambda'_\nu:=\bigcup\{\Lambda^\nu_j:\Lambda^\nu_j\cap[-2N_\nu,2N_\nu]\neq\emptyset,\ \Lambda^\nu_j\subset\Lambda^\nu\}$，满足$\mathrm{diam}\Lambda'_\nu\leq 2(M_\nu+2)N_\nu$。那么，$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu$的对角化过程即为其中的子块$(\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda'_\nu}+\tilde{A}_\nu)$和$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu_j}$各自的对角化过程。

作为$\tilde{D}^{\nu}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu$的特征值，$\{\mu^\nu_n\}_{n\in\Lambda^\nu}$是$C^1_W$地依赖于参数$\xi\in\mathcal{O}_\nu$且存在相应于$\mu^\nu_n$，同样$C^1_W$地依赖于$\xi$的正交规范特征向量$\psi^\nu_n$（详见，例如[13]）。实际上，$\mu^\nu_n=\langle(\tilde{D}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu)\psi^\nu_n,\bar{\psi}^\nu_n\rangle$且

$$\partial_{\xi_j}\mu^\nu_n=\langle(\partial_{\xi_j}(\tilde{D}_{\Lambda^\nu}+\tilde{A}_\nu))\psi^\nu_n,\bar{\psi}^\nu_n\rangle,\quad j=1,\cdots,b.$$

由$\tilde{A}_\nu$的构造，可知$\partial_{\xi_j}\tilde{A}_\nu=Q^*_\nu(\partial_{\xi_j}\hat{A}_\nu)Q_\nu$，其中$\hat{A}_\nu$为$U^*_\nu(A+W_\nu(\xi))U_\nu$的截断。因为$D_\nu,A,U_\nu$和$Q_\nu$都不依赖于$\xi$，所以

$$\sup_{\xi\in\mathcal{O}_\nu}|\partial_\xi\mu^\nu_n|\leq c\sup_{\substack{\xi\in\mathcal{O}_\nu\\ m,n}}|\partial_\xi(W_\nu)_{mn}|\leq cp_\nu. \tag{3.26}$$

对某$0<\gamma_\nu\ll 1,\tau\geq b$，我们定义参数集$\mathcal{O}_{\nu+1}\subset\mathcal{O}_\nu$如下：

$$\mathcal{O}_{\nu+1}:=\left\{\xi\in\mathcal{O}_\nu:\begin{array}{c}|\langle k,\omega_\nu\rangle|>\frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau},\quad k\neq 0,\\ |\langle k,\omega_\nu\rangle+\mu^\nu_n|>\frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau N^2_{\nu+1}},\quad k\neq 0,\ \ n\in\Lambda^\nu,\\ |\langle k,\omega_\nu\rangle+\mu^\nu_m\pm\mu^\nu_n|>\frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau N^4_{\nu+1}},\quad k\neq 0,\ \ m,n\in\Lambda^\nu.\end{array}\right\}. \tag{3.27}$$

这就是控制线性化方程的解的小分母条件。

从现在起，为简化符号，第ν步时数量的下标（或上标）“ν”将被省略，而第$\nu+1$步时相应的数量则被加注下标（或上标）“$+$”。此外，我们仍以上标“(j)”区分不同子过程中的数量。

§3.3.2 同调方程及其近似解

对于$P=\sum_{k,l,\alpha,\beta}P_{kl\alpha\beta}(\xi)I^le^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}q^\alpha\bar q^\beta$，根据(3.8)以及§2.2.1中范数的定义，我们有

$$|P_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}}\le\varepsilon e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}e^{-|k|r},\quad\forall k\in\mathbb{Z}^b,\ \ 2|l|+|\alpha|+|\beta|\le 2.\tag{3.28}$$

考虑分解$P=R+(P-R)$，其中

$$R:=\sum_{\substack{k\\2|l|+|\alpha|+|\beta|\le2}}P_{kl\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}I^lq^\alpha\bar q^\beta,\quad P-R=\sum_{\substack{k\\2|l|+|\alpha|+|\beta|\ge3}}P_{kl\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}I^lq^\alpha\bar q^\beta.$$

那么$\|X_R\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}\le\|X_P\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}\le\varepsilon$。由于$\breve P(q,\bar q)$为$q,\bar q$的高次项之和，则对于$\eta:=\varepsilon^{\frac15}$，存在常数$c_2>0$使得

$$\|X_{\breve P}\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r,\eta s),\mathcal{O}},\ \|X_{P-R}\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r,\eta s),\mathcal{O}}\le c_2\eta s\le\frac18\varepsilon^{\frac65},\tag{3.29}$$

如果

(C2)： $c_2s\le\frac18\varepsilon$。

令$e':=P_{0000}$, $\omega':=\displaystyle\int\frac{\partial P}{\partial I}d\theta|_{q=\bar q=0,I=0}$。若$\mathcal{O}_+$如(3.27)中所定义，则我们有

命题 3.1 *存在两个Hamilton函数*

$$F=\sum_{\substack{k\neq0\\1\le2|l|+|\alpha|+|\beta|\le2}}F_{kl\alpha\beta}q^\alpha\bar q^\beta I^le^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle},\quad\grave P=\sum_{\substack{k\\1\le|\alpha|+|\beta|\le2}}\grave P_{k0\alpha\beta}q^\alpha\bar q^\beta e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle},$$

以及Hermite矩阵W'（都C^1_W地依赖于$\xi\in\mathcal{O}_+$），使得

$$\{\mathcal{N},F\}+R=e'+\langle\omega',I\rangle+\langle W'q,\bar q\rangle+\grave P.\tag{3.30}$$

此外，F与$\grave P$都具有规范不变性，且对于充分小的ε,

$$|F_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{\frac45}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}},\tag{3.31}$$

$$|\grave P_{k0\alpha\beta}|_{\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{\frac75}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}},\tag{3.32}$$

$$|W'_{mn}|_{\mathcal{O}_+}\le\begin{cases}\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}, & |m|,|n|\le N_+,\quad m,n\notin\mathcal{J}\\ 0, & o.w.\end{cases},\tag{3.33}$$

$$\partial_{q_n}F=\partial_{\bar q_n}F=\partial_{q_n}\grave P=\partial_{\bar q_n}\grave P\equiv0,\quad n\in\mathcal{J}.\tag{3.34}$$

命题3.1的证明： 我们将证明分为以下部分。

- **截断以及近似线性化方程**

首先，我们将R写为

$$
\begin{aligned}
R &= \sum_{\substack{k \\ |l|\le 1}} P_{kl00} e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l + \sum_k (\langle P^{k10}, q\rangle + \langle P^{k01}, \bar{q}\rangle) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} \\
&\quad + \sum_k (\langle P^{k20} q, q\rangle + \langle P^{k11} q, \bar{q}\rangle + \langle P^{k02} \bar{q}, \bar{q}\rangle) e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle},
\end{aligned}
$$

其中P^{k10}, P^{k01}, P^{k20}, P^{k11}, P^{k02}分别表示

$$
\begin{aligned}
&\left(P_n^{k10}\right) := \left(P_{k0e_n0}\right), \qquad \left(P_n^{k01}\right) := \left(P_{k00e_n}\right), \\
&\left(P_{mn}^{k20}\right) := \left(P_{kl(e_m+e_n)0}\right), \quad \left(P_{mn}^{k11}\right) := \left(P_{kle_me_n}\right), \quad \left(P_{mn}^{k02}\right) := \left(P_{kl0(e_m+e_n)}\right).
\end{aligned}
$$

P的规范不变性表明P^{010}, P^{001}, P^{020}, $P^{002} \equiv 0$。

我们试图构造一个与R形式相同的Hamilton函数F使得

$$
\{\mathcal{N}, F\} + R = e' + \langle \omega', I\rangle + \langle P^{011} q, \bar{q}\rangle. \tag{3.35}
$$

由直接计算以及系数的简单比较，对于$k \neq 0$和$|l| \le 1$，方程(3.35)等价于下列方程：

$$
\langle k, \omega\rangle F_{kl00} = \mathrm{i} P_{kl00}, \tag{3.36}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} - \Omega) F^{k10} = \mathrm{i} P^{k10}, \tag{3.37}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} + \Omega) F^{k01} = \mathrm{i} P^{k01}, \tag{3.38}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} - \Omega) F^{k20} - F^{k20}\Omega = \mathrm{i} P^{k20}, \tag{3.39}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} - \Omega) F^{k11} + F^{k11}\Omega = \mathrm{i} P^{k11}, \tag{3.40}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} + \Omega) F^{k02} + F^{k02}\Omega = \mathrm{i} P^{k02}. \tag{3.41}
$$

根据$\mathcal{O}_+$的定义，可知(3.36)在$\mathcal{O}_+$上可解，且其解满足

$$
|F_{kl00}|_{\mathcal{O}_+} \le \gamma^{-2} |k|^{2\tau+1} \varepsilon e^{-|k|r}. \tag{3.42}
$$

至于(3.37) – (3.41)，我们考虑方程组

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} - (D + \hat{A})) \hat{F}^{k10} = \mathrm{i} \hat{R}^{k10}, \tag{3.43}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} + (D + \hat{A})) \hat{F}^{k01} = \mathrm{i} \hat{R}^{k01}, \tag{3.44}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} - (D + \hat{A})) \hat{F}^{k20} - \hat{F}^{k20}(D + \hat{A}) = \mathrm{i} \hat{R}^{k20}, \tag{3.45}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} - (D + \hat{A})) \hat{F}^{k11} + \hat{F}^{k11}(D + \hat{A}) = \mathrm{i} \hat{R}^{k11}, \tag{3.46}
$$

$$
(\langle k, \omega\rangle I_{\mathbb{Z}} + (D + \hat{A})) \hat{F}^{k02} + \hat{F}^{k02}(D + \hat{A}) = \mathrm{i} \hat{R}^{k02}, \tag{3.47}
$$

这里D与$\hat{A}$如前一节所定义，且对$k\neq 0$，

$$\hat{R}^{kx}_n=\begin{cases}(U^*P^{kx})_n, & |n|\leq K_+\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases},\quad x=\text{“10”, “01”},\tag{3.48}$$

$$\hat{R}^{kx}_{mn}=\begin{cases}(U^*P^{kx}U)_{mn}, & |m|,|n|\leq K_+\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases},\quad x=\text{“20”, “11”, “02”}.\tag{3.49}$$

由(3.19)与(3.28)，且通过应用引理B.1，可知存在$c_3>0$使得

$$|(U^*P^{kx})_n|_{\mathcal{O}}\leq c_3(\sigma-\rho)^{-1}\varepsilon e^{-\rho|n|}e^{-|k|r},\tag{3.50}$$

$$|(U^*P^{kx}U)_{mn}|_{\mathcal{O}}\leq c_3(\sigma-\rho)^{-2}\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r}.\tag{3.51}$$

这意味着

$$|(U^*P^{kx}-\hat{R}^{kx})_n|_{\mathcal{O}}\leq \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{7}{5}}e^{-\rho^{(1)}|n|}e^{-|k|r},\tag{3.52}$$

$$|(U^*P^{kx}U-\hat{R}^{kx})_{mn}|_{\mathcal{O}}\leq \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{7}{5}}e^{-\rho^{(1)}\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r},\tag{3.53}$$

如果

(C3)： $c_3(\sigma-\rho)^{-4}e^{-(\rho-\rho^{(1)})K_+}\leq\frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{2}{5}}$。

方程(3.43) – (3.47)的解即为(3.37) – (3.41)的近似解，稍后我们将对误差进行估计。

- **分块对角化以及F的构造**

考虑方程组

$$(\langle k,\omega\rangle I_\Lambda-(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}))\tilde{F}^{k10}=\mathrm{i}\tilde{R}^{k10},\tag{3.54}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I_\Lambda+(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}))\tilde{F}^{k01}=\mathrm{i}\tilde{R}^{k01},\tag{3.55}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I_\Lambda-(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}))\tilde{F}^{k20}-\tilde{F}^{k20}(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A})=\mathrm{i}\tilde{R}^{k20},\tag{3.56}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I_\Lambda-(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}))\tilde{F}^{k11}+\tilde{F}^{k11}(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A})=\mathrm{i}\tilde{R}^{k11},\tag{3.57}$$

$$(\langle k,\omega\rangle I_\Lambda+(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}))\tilde{F}^{k02}+\tilde{F}^{k02}(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A})=\mathrm{i}\tilde{R}^{k02},\tag{3.58}$$

其中$\tilde{D}_\Lambda$和$\tilde{A}$如(3.24)中是通过正交矩阵Q所定义的，而

$$\tilde{R}^{kx}:=\begin{cases}Q^*\hat{R}^{kx}, & x=\text{“10”, “01”}\\ Q^*\hat{R}^{kx}Q, & x=\text{“20”, “11”, “02”}\end{cases}.$$

注意到当$|m-n|>N$时$Q_{mn}=0$，那么由(3.48)和(3.49)可得

$$\begin{aligned}&\tilde{R}_n^{kx}\equiv 0,\ \ |n|>K_++N,\quad x=\text{“10”},\ \text{“01”},\\&\tilde{R}_{mn}^{kx}\equiv 0,\ \ \max\{|m|,|n|\}>K_++N,\quad x=\text{“20”},\ \text{“11”},\ \text{“02”}.\end{aligned}$$

因此，根据$\Lambda:=\bigcup\{\Lambda_j:\Lambda_j\cap[-(K_++N),\ K_++N]\neq\emptyset\}$，这些有限维矩阵方程的解满足

$$\begin{aligned}&\tilde{F}_n^{kx}\equiv 0,\ \ n\notin\Lambda,\quad x=\text{“10”},\ \text{“01”},\\&\tilde{F}_{mn}^{kx}\equiv 0,\ \ \{m,n\}\cap\Lambda=\emptyset,\quad x=\text{“20”},\ \text{“11”},\ \text{“02”}.\end{aligned}$$

那么，考虑到

$$\begin{aligned}&\left(\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}\pm(\tilde{D}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{kx}=\left(\langle k,\omega\rangle I_{\Lambda}\pm(\tilde{D}_{\Lambda}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{kx},\quad x=\text{“10”},\ \text{“01”},\\&\left(\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}\pm(\tilde{D}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{kx}=\left(\langle k,\omega\rangle I_{\Lambda}\pm(\tilde{D}_{\Lambda}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{kx},\quad x=\text{“20”},\ \text{“11”},\ \text{“02”},\\&\tilde{F}^{kx}(\tilde{D}+\tilde{A})=\tilde{F}^{kx}(\tilde{D}_{\Lambda}+\tilde{A}),\quad x=\text{“20”},\ \text{“11”},\ \text{“02”},\end{aligned}$$

它们分别为方程

$$\begin{aligned}&\left(\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-(\tilde{D}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{k10}=\mathrm{i}\tilde{R}^{k10},\\&\left(\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}+(\tilde{D}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{k01}=\mathrm{i}\tilde{R}^{k01},\\&\left(\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-(\tilde{D}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{k20}-\tilde{F}^{k20}(\tilde{D}+\tilde{A})=\mathrm{i}\tilde{R}^{k20},\\&\left(\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-(\tilde{D}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{k11}+\tilde{F}^{k11}(\tilde{D}+\tilde{A})=\mathrm{i}\tilde{R}^{k11},\\&\left(\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}+(\tilde{D}+\tilde{A})\right)\tilde{F}^{k02}+\tilde{F}^{k02}(\tilde{D}+\tilde{A})=\mathrm{i}\tilde{R}^{k02},\end{aligned}$$

的解。由于D可以通过正交矩阵Q分块对角化，以上的方程分别等价于方程(3.43) − (3.47)。

现在，对$k\neq 0$和$m,n\in\Lambda$，我们关注下列方程：

$$\begin{aligned}&(\langle k,\omega\rangle-\mu_n)\check{F}_n^{k10}=\mathrm{i}(O^*\tilde{R}^{k10})_n,\\&(\langle k,\omega\rangle+\mu_n)\check{F}_n^{k01}=\mathrm{i}(O^*\tilde{R}^{k01})_n,\\&(\langle k,\omega\rangle-\mu_m-\mu_n)\check{F}_{mn}^{k20}=\mathrm{i}(O^*\tilde{R}^{k20}O)_{mn},\\&(\langle k,\omega\rangle-\mu_m+\mu_n)\check{F}_{mn}^{k11}=\mathrm{i}(O^*\tilde{R}^{k11}O)_{mn},\\&(\langle k,\omega\rangle+\mu_m+\mu_n)\check{F}_{mn}^{k02}=\mathrm{i}(O^*\tilde{R}^{k02}O)_{mn}.\end{aligned}$$

这是通过正交矩阵O将$\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}$对角化，由(3.54) – (3.58)转化而来的。明显地，这些方程在$\mathcal{O}_+$上可解。从而，(3.43) – (3.47)的解为

$$\hat{F}^{kx}=\begin{cases} QO\check{F}^{kx}, & x=\text{“10”, “01”} \\ QO\check{F}^{kx}O^*Q^*, & x=\text{“20”, “11”, “02”} \end{cases}.$$

令

$$F^{kx}:=\begin{cases} U\hat{F}^{kx}, & x=\text{“10”, “01”} \\ U\hat{F}^{kx}U^*, & x=\text{“20”, “11”, “02”} \end{cases},$$

那么我们就得到Hamilton函数

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\substack{k\neq 0\\ |l|\leq 1}} F_{kl00}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}I^l+\sum_{k\neq 0}(\langle F^{k10},q\rangle+\langle F^{k01},\bar{q}\rangle)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} \\ &\quad +\sum_{k\neq 0}(\langle F^{k20}q,q\rangle+\langle F^{k11}q,\bar{q}\rangle+\langle F^{k02}\bar{q},\bar{q}\rangle)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\overline{F_{(-k)l00}}=F_{kl00}, \quad \overline{F^{(-k)10}}=F^{k01}, \quad \overline{F^{(-k)01}}=F^{k10}, \\ &\overline{F^{(-k)20}}=F^{k02}, \quad (F^{(-k)11})^*=F^{k11}, \quad \overline{F^{(-k)02}}=F^{k20}, \end{aligned}$$

就容易证明$\bar{F}=F$。

- **对F系数的估计**

除了在(3.42)中估计的F_{kl00}，我们还需控制F^{k10}_n, F^{k01}_n, F^{k20}_{mn}, F^{k11}_{mn}, F^{k02}_{mn}。我们以F^{k20}_{mn}为例进行考虑，其他各项类似。通过以上的构造，可知

$$F^{k20}_{mn}=\mathrm{i}\sum_{\mathcal{F}_0}\frac{U_{mn_1}Q_{n_1n_2}O_{n_2n_3}O^*_{n_3n_4}Q^*_{n_4n_5}\hat{R}^{k20}_{n_5n_6}Q_{n_6n_7}O_{n_7n_8}O^*_{n_8n_9}Q^*_{n_9n_{10}}U^*_{n_{10}n}}{\langle k,\omega\rangle-\mu_{n_3}-\mu_{n_8}}, \tag{3.59}$$

其中，根据Q与O的结构，即(3.21)和(3.25)，求和记号$\mathcal{F}_0$表示

$$\left\{\begin{array}{l} n_1\in\mathbb{Z},\ \ |n_2-n_1|\leq N,\ \ |n_3-n_2|,|n_4-n_3|\leq 2(M+2)N,\ \ |n_5-n_4|\leq N, \\ n_{10}\in\mathbb{Z},\ \ |n_9-n_{10}|\leq N,\ \ |n_8-n_9|,|n_7-n_8|\leq 2(M+2)N,\ \ |n_6-n_7|\leq N \end{array}\right\}$$

那么，由(3.51)和引理B.1，

$$\sup_{\xi\in\mathcal{O}_+}|F^{k20}_{mn}(\xi)|\leq c(\gamma^{-1}|k|^\tau N_+^4)(\sigma-\rho)^{-4}M^4N^8e^{(4M+10)N\rho}\varepsilon e^{-|k|r}e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}.$$

这里我们应用了正交矩阵Q和O的性质，并用因子$e^{(4M+10)N\rho}$使指数衰减性得以恢复。

为估计$|\partial_{\xi_j} F^{k20}_{mn}|$，我们需对(3.56)的两边关于$\xi_j,\ j=1,2,\cdots,b$求导。那么我们得到关于$\partial_{\xi_j}\tilde{F}^{k20}$的方程

$$(\langle k,\omega\rangle I_\Lambda-(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}))(\partial_{\xi_j}\tilde{F}^{k20})-(\partial_{\xi_j}\tilde{F}^{k20})(\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A})=\breve{R}^{k20}_{\xi_j},$$

其中

$$\breve{R}^{k20}_{\xi_j}:=\mathrm{i}\partial_{\xi_j}\tilde{R}^{k20}+\tilde{F}^{k20}(\partial_{\xi_j}\tilde{A})-(\partial_{\xi_j}(\langle k,\omega\rangle I-\tilde{A}))\tilde{F}^{k20}.$$

这同样可以通过用O将$\tilde{D}_\Lambda+\tilde{A}$对角化解得。我们就得到表达式

$$\partial_{\xi_j}F^{k20}_{mn}=\sum_{\mathcal{F}_1}\frac{U_{mn_1}Q_{n_1n_2}O_{n_2n_3}O^*_{n_3n_4}(\breve{R}^{k20}_{\xi_j})_{n_4n_5}O_{n_5n_6}O^*_{n_6n_7}Q^*_{n_7n_8}U^*_{n_8n}}{\langle k,\omega\rangle-\mu_{n_3}-\mu_{n_6}},$$

其中$\mathcal{F}_1$表示

$$\left\{\begin{array}{l} n_1\in\mathbb{Z},\ \ |n_2-n_1|\le N,\ \ |n_3-n_2|,|n_4-n_3|\le 2(M+2)N,\\ n_8\in\mathbb{Z},\ \ |n_7-n_8|\le N,\ \ |n_6-n_7|,|n_5-n_6|\le 2(M+2)N \end{array}\right\}.$$

由$\hat{R}^{k20}$和$\partial_{\xi_j}\hat{A}$的衰减性，我们有

$$\sup_{\xi\in\mathcal{O}_+}|(\breve{R}^{k20}_{\xi_j})_{mn}|\le c(\gamma^{-1}|k|^{\tau+1}N_+^4)(\sigma-\rho)^{-4}M^4N^8e^{(4M+11)N\rho}\varepsilon e^{-|k|r}e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}.$$

因此存在常数$c_4>0$使得

$$\begin{aligned}&\sup_{\xi\in\mathcal{O}_+}(|F^{k20}_{mn}|+|\partial_\xi F^{k20}_{mn}|)\\ \le\ & c_4(\gamma^{-2}|k|^{2\tau+1}N_+^8)(\sigma-\rho)^{-6}M^8N^{14}e^{(8M+20)N\rho}\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r}\\ \le\ & \varepsilon^{\frac{4}{5}}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}},\end{aligned}$$

如果

(C4)： $c_4\gamma^{-2}(\sigma-\rho)^{-6}N_+^8M^8N^{14}e^{(8M+20)N\rho}\varepsilon^{\frac{1}{5}}\le 1$。

由**(A5)**可知

$$P^{k20}\equiv 0,\quad \sum_{i=1}^b k_i+2\ne 0.$$

因为$\hat{R}^{k20}$是$U^*P^{k20}U$的截断，所以

$$\hat{R}^{k20}\equiv 0,\quad \sum_{i=1}^b k_i+2\ne 0.$$

再根据表达式(3.59)中F^{k20}_{mn}的表达式，$F^{k20}\equiv 0$。

对F^{k11}, F^{k02}, F^{k10}, F^{k01}按如上方式做同样处理，我们得到F的规范不变性，以及不等式(3.31)。

- **对$\grave{P}$系数的估计**

令W'为P^{011}的截断，满足

$$W'_{mn}=\begin{cases} P^{011}_{mn}, & |m|,|n|\le N_+ \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases},$$

且令

$$\grave{P}=\langle \grave{P}^{011}q,\bar{q}\rangle+\sum_{k\neq 0}(\langle \grave{P}^{k10},q\rangle+\langle \grave{P}^{k01},\bar{q}\rangle+\langle \grave{P}^{k20}q,q\rangle+\langle \grave{P}^{k11}q,\bar{q}\rangle+\langle \grave{P}^{k02}\bar{q},\bar{q}\rangle)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}$$

满足

$$\begin{aligned}
\grave{P}^{011} &:= P^{011}-W',\\
\grave{P}^{k10} &:= (P^{k10}-U\hat{R}^{k10})-\mathrm{i}(\grave{A}+\grave{Z})F^{k10},\\
\grave{P}^{k01} &:= (P^{k01}-U\hat{R}^{k01})+\mathrm{i}(\grave{A}+\grave{Z})F^{k01},\\
\grave{P}^{k20} &:= (P^{k20}-U\hat{R}^{k20}U^*)-\mathrm{i}(\grave{A}+\grave{Z})F^{k20}-\mathrm{i}F^{k20}(\grave{A}+\grave{Z}),\\
\grave{P}^{k11} &:= (P^{k11}-U\hat{R}^{k11}U^*)-\mathrm{i}(\grave{A}+\grave{Z})F^{k11}+\mathrm{i}F^{k11}(\grave{A}+\grave{Z}),\\
\grave{P}^{k02} &:= (P^{k02}-U\hat{R}^{k02}U^*)+\mathrm{i}(\grave{A}+\grave{Z})F^{k02}+\mathrm{i}F^{k02}(\grave{A}+\grave{Z}),
\end{aligned}$$

其中$\grave{A}:=(A+W)-U\hat{A}U^*$, $\grave{Z}:=UZU^*$。那么，

$$\{\mathcal{N},F\}+R=e'+\langle\omega',I\rangle+\langle W'q,\bar{q}\rangle+\grave{P}. \tag{3.60}$$

由(3.17)和(3.18)可知(3.33)成立，且

$$|\grave{P}^{011}_{mn}|_{\mathcal{O}_+}\le\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}\le\varepsilon^{\frac{7}{5}}e^{-\rho^{(1)}\max\{|m|,|n|\}},$$

如果

(C5)： $e^{-(\rho-\rho^{(1)})N_+}\le\varepsilon^{\frac{2}{5}}$。

对于(3.32)中$k\neq 0$的情形，我们仅对$\grave{P}^{k20}$进行估计，其他项可做类似处理。由(3.53)和**(C3)**，并结合引理B.1，可得

$$\begin{aligned}
\left|\left(P^{k20}-U\hat{R}^{k20}U^*\right)_{mn}\right|_{\mathcal{O}} &= \left|\left(U(U^*P^{k20}U-\hat{R}^{k20})U^*\right)_{mn}\right|_{\mathcal{O}}\\
&\le \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{7}{5}}e^{-\rho^{(1)}\max\{|m|,|n|\}}e^{-|k|r}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

再根据(3.20)和(3.23)，

$$|\grave{A}_{mn}|_{\mathcal{O}} \leq c(\sigma-\rho)^{-2}\varepsilon e^{-\rho\max\{|m|,|n|\}}, \quad |\grave{Z}_{mn}| \leq c(\sigma-\rho)^{-2}\varepsilon e^{-\rho|m-n|}.$$

那么，通过再次应用引理B.1，存在$c_6>0$使得

$$\begin{aligned} & \left|\left(F^{k20}(\grave{A}+\grave{Z})\right)_{mn}\right|_{\mathcal{O}_+}, \quad \left|\left((\grave{A}+\grave{Z})F^{k20}\right)_{mn}\right|_{\mathcal{O}_+} \\ \leq\ & c_6(\sigma-\rho)^{-2}(\rho-\rho^{(1)})^{-1}\varepsilon^{\frac{9}{5}}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}e^{-\rho^{(1)}\max\{|m|,|n|\}} \\ \leq\ & \frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{7}{5}}|k|^{2\tau+1}e^{-|k|r}e^{-\rho^{(1)}\max\{|m|,|n|\}}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

如果

(C6)： $c_6(\sigma-\rho)^{-2}(\rho-\rho^{(1)})^{-1}\varepsilon^{\frac{2}{5}} \leq \frac{1}{4}$。

因此，将(3.61)与(3.62)相结合，即可得命题中关于$\grave{P}^{k20}$的估计。

由$\grave{P}$的构造，规范不变性容易验证。

- **(3.34)的验证**

根据以上R与W'的构造，(3.60)中有可能依赖变量$(q_n,\bar{q}_n)_{n\in\mathcal{J}}$的只有$F$和$\grave{P}$。令

$$\begin{aligned} \acute{F} &= \sum_{k\neq 0}\left(\sum_{n\in\mathcal{J}}(F_n^{k10}q_n+F_n^{k01}\bar{q}_n)\right)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} \\ &\quad +\sum_{k\neq 0}\left(\sum_{\{m,n\}\cap\mathcal{J}\neq\emptyset}(F_{mn}^{k20}q_mq_n+F_{mn}^{k11}q_m\bar{q}_n+F_{mn}^{k02}\bar{q}_m\bar{q}_n)\right)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} \\ &=: \sum_{k\neq 0}\left(\langle \acute{F}^{k10},q\rangle+\langle \acute{F}^{k01},\bar{q}\rangle+\langle \acute{F}^{k20}q,q\rangle+\langle \acute{F}^{k11}q,\bar{q}\rangle+\langle \acute{F}^{k02}\bar{q},\bar{q}\rangle\right)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}. \end{aligned}$$

对于满足m或$n\in\mathcal{J}$的(m,n)，由(3.15)，可知

$$\begin{aligned} & \left((\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-\Omega)\acute{F}^{k20}-\acute{F}^{k20}\Omega\right)_{mn} \\ =\ & \langle k,\omega\rangle \acute{F}_{mn}^{k20}-\sum_{l\notin\mathcal{J}}\Omega_{ml}\acute{F}_{ln}^{k20}-\sum_{l\notin\mathcal{J}}\acute{F}_{ml}^{k20}\Omega_{ln} \\ =\ & \begin{cases} \langle k,\omega\rangle F_{mn}^{k20}, & m,n\in\mathcal{J} \\ \langle k,\omega\rangle F_{mn}^{k20}-\sum_{l\notin\mathcal{J}}\Omega_{ml}F_{ln}^{k20}, & m\notin\mathcal{J},\quad n\in\mathcal{J} \\ \langle k,\omega\rangle F_{mn}^{k20}-\sum_{l\notin\mathcal{J}}F_{ml}^{k20}\Omega_{ln}, & m\in\mathcal{J},\quad n\notin\mathcal{J} \end{cases} \\ =\ & \left((\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-\Omega)F^{k20}-F^{k20}\Omega\right)_{mn}. \end{aligned}$$

比较等式(3.60)两边各项之系数，

$$\Big((\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-\Omega)\acute{F}^{k20}-\acute{F}^{k20}\Omega\Big)_{mn}=-\mathrm{i}\grave{P}^{k20}_{mn},\quad \{m,n\}\cap\mathcal{J}\neq\emptyset.$$

类似地，

$$\begin{aligned}
&\Big((\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-\Omega)\acute{F}^{k10}\Big)_{n}=-\mathrm{i}\grave{P}^{k10}_{n},\quad n\in\mathcal{J},\\
&\Big((\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}+\Omega)\acute{F}^{k01}\Big)_{n}=-\mathrm{i}\grave{P}^{k01}_{n},\quad n\in\mathcal{J},\\
&\Big((\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}-\Omega)\acute{F}^{k11}+\acute{F}^{k11}\Omega\Big)_{mn}=-\mathrm{i}\grave{P}^{k11}_{mn},\quad \{m,n\}\cap\mathcal{J}\neq\emptyset,\\
&\Big((\langle k,\omega\rangle I_{\mathbb{Z}}+\Omega)\acute{F}^{k02}+\acute{F}^{k02}\Omega\Big)_{mn}=-\mathrm{i}\grave{P}^{k02}_{mn},\quad \{m,n\}\cap\mathcal{J}\neq\emptyset.
\end{aligned}$$

因此，$\{\mathcal{N},\acute{F}\}$就等于

$$\sum_{k\neq 0}\left(\sum_{n\in\mathcal{J}}(\grave{P}^{k10}_{n}q_n+\grave{P}^{k01}_{n}\bar{q}_n)+\sum_{\{m,n\}\cap\mathcal{J}\neq\emptyset}(\grave{P}^{k20}_{mn}q_mq_n+\grave{P}^{k11}_{mn}q_m\bar{q}_n+\grave{P}^{k02}_{mn}\bar{q}_m\bar{q}_n)\right)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}.$$

这意味着，如果我们以不依赖变量$(q_n,\bar{q}_n)_{n\in\mathcal{J}}$的$F-\acute{F}$代替$F$，那么整个系统就会保持与变量$(q_n,\bar{q}_n)_{n\in\mathcal{J}}$的无关性。这样(3.34)就得以满足。 □

§3.3.3 假设条件的验证

我们将对X_F的范数进行估计，并研究Φ^1_F在较小区域

$$\mathcal{D}_i:=\mathcal{D}_{d,\rho_+}(r^{(1)}+\frac{i}{4}(r-r^{(1)}),\ \frac{i}{4}s),\quad i=1,2,3,4,$$

上的性质。

引理 3.2 对于充分小的ε，$\|X_F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{\frac{3}{4}}$，且$\|X_{\grave{P}}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{\frac{5}{4}}$。

证明：根据命题3.1中F的衰减性质，

$$\frac{1}{s^2}\|\partial_\theta F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+},\ \|\partial_I F\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le c(r-r^{(1)})^{-(2\tau+b+1)}\varepsilon^{\frac{4}{5}},$$

且

$$\begin{aligned}
&\sup_{\mathcal{D}_3}\frac{1}{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\|\partial_{q_n}F\|_{\mathcal{O}_+}+\|\partial_{\bar{q}_n}F\|_{\mathcal{O}_+}\right)\langle n\rangle^d e^{\rho_+|n|}\\
\le\ &\sup_{\mathcal{D}_3}\frac{C}{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\neq 0}\left(|F^{k10}_{n}|_{\mathcal{O}_+}+|F^{k01}_{n}|_{\mathcal{O}_+}\right)e^{|k|(r-\frac{1}{4}(r-r^{(1)}))}\langle n\rangle^d e^{\rho_+|n|}\\
&+\sup_{\mathcal{D}_3}\frac{C}{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{k\neq 0\\ m\in\mathbb{Z}}}(|F^{k20}_{mn}|_{\mathcal{O}_+}+|F^{k11}_{mn}|_{\mathcal{O}_+}+|F^{k02}_{mn}|_{\mathcal{O}_+})|q_m|e^{|k|(r-\frac{1}{4}(r-r^{(1)}))}\langle n\rangle^d e^{\rho_+|n|}\\
\le\ &c(r-r^{(1)})^{-(2\tau+b+1)}(\rho-\rho_+)^{-2}\varepsilon^{\frac{4}{5}}.
\end{aligned}$$

将以上估计相结合，则可知存在常数$c_7 > 0$使得

$$\|X_F\|_{\mathcal{D}_3, \mathcal{O}_+} \leq c_7 (r - r^{(1)})^{-(2\tau+b+1)} (\rho - \rho_+)^{-2} \varepsilon^{\frac{4}{5}}.$$

采取同样的方式，可得

$$\|X_{\grave{P}}\|_{\mathcal{D}_3, \mathcal{O}_+} \leq c_7 (r - r^{(1)})^{-(2\tau+b+1)} (\rho^{(1)} - \rho_+)^{-2} \varepsilon^{\frac{7}{5}}.$$

此外，如果

(C7)：$c_7 (r - r^{(1)})^{-(2\tau+b+1)} (\rho^{(1)} - \rho_+)^{-2} \varepsilon^{\frac{1}{20}} \leq \frac{1}{3}$，

那么引理3.2成立。 □

令$\mathcal{D}_{i\eta} = \mathcal{D}_{d,\rho_+}(r^{(1)} + \frac{i}{4}(r - r^{(1)}), \frac{i}{4}\eta s)$, $i = 1, 2, 3, 4$。

引理 3.3 对于充分小的ε，$\Phi_F^t : \mathcal{D}_{2\eta} \to \mathcal{D}_{3\eta}$, $-1 \leq t \leq 1$，且

$$\|D\Phi_F^t - I\|_{\mathcal{D}_{1\eta}} < 2\varepsilon^{\frac{3}{4}}.$$

现在，为强调我们处在第1个子过程中，我们令$F^{(1)}$, $e^{(1)}$, $\omega^{(1)}$, $W^{(1)}$, $\grave{P}^{(1)}$表示(3.30)中相应的量。定义$H^{(1)}$为

$$\begin{aligned}
H^{(1)} &:= H \circ \Phi^1_{F^{(1)}} \\
&= (\mathcal{N} + \breve{P} + R) \circ \Phi^1_{F^{(1)}} + (P - R) \circ \Phi^1_{F^{(1)}} \\
&= \mathcal{N} + \breve{P} + \{\mathcal{N}, F^{(1)}\} + R + \int_0^1 (1-t)\{\{\mathcal{N}, F^{(1)}\}, F^{(1)}\} \circ \Phi^t_{F^{(1)}} \, dt \\
&\quad + \int_0^1 \{\breve{P} + R, F^{(1)}\} \circ \Phi^t_{F^{(1)}} \, dt + (P - R) \circ \Phi^1_{F^{(1)}} \\
&= \mathcal{N} + \breve{P} + e^{(1)} + \langle \omega^{(1)}, I \rangle + \langle W^{(1)} q, \bar{q} \rangle + P^{(1)},
\end{aligned}$$

其中

$$P^{(1)} := \grave{P}^{(1)} + \int_0^1 \{(1-t)\{\mathcal{N}, F^{(1)}\} + \breve{P} + R, F^{(1)}\} \circ \Phi^t_{F^{(1)}} \, dt + (P - R) \circ \Phi^1_{F^{(1)}}.$$

令$R(t) := (1-t)(e^{(1)} + \langle \omega^{(1)}, I \rangle + \langle W^{(1)} q, \bar{q} \rangle + \grave{P}^{(1)}) + tR$，它满足$\|X_{R(t)}\|_{\mathcal{D}_3} \leq c\varepsilon$。那么$P^{(1)}$可被写作

$$P^{(1)} = \grave{P}^{(1)} + \int_0^1 \{R(t) + \breve{P},\, F^{(1)}\} \circ \Phi^t_{F^{(1)}} \, dt + (P - R) \circ \Phi^1_{F^{(1)}}.$$

从而，

$$X_{P^{(1)}-\grave{P}^{(1)}} \;=\; \int_0^1 (\Phi^t_{F^{(1)}})^* X_{\{R(t)+\breve{P},\,F^{(1)}\}}\,dt \;+\; (\Phi^1_{F^{(1)}})^* X_{(P-R)}.$$

由引理A.3可知，

$$\|X_{\{R(t)+\breve{P},\,F^{(1)}\}}\|_{\mathcal{D}_{2\eta}} \le c\eta^{-2}\varepsilon^{\frac{7}{4}} = \varepsilon^{\frac{27}{20}}.$$

那么，结合(3.29)以及引理3.2和3.3的结论，

$$\|X_{P^{(1)}}\|_{\mathcal{D}^{(1)},\,\mathcal{O}_+} \le \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{6}{5}} + 2\varepsilon^{\frac{5}{4}} + 2c\varepsilon^{\frac{27}{20}} \le \varepsilon^{\frac{6}{5}} = \varepsilon^{(1)}.$$

我们还需验证$P^{(1)}$满足假设条件**(A4)**和**(A5)**。注意到

$$\begin{aligned}
P^{(1)} \;=\;& \grave{P}^{(1)} + P - R + \{\breve{P}, F^{(1)}\} + \{P, F^{(1)}\} \\
&+\frac{1}{2!}\{\{\mathcal{N}, F^{(1)}\}, F^{(1)}\} + \frac{1}{2!}\{\{\breve{P}, F^{(1)}\}, F^{(1)}\} + \frac{1}{2!}\{\{P, F^{(1)}\}, F^{(1)}\} + \cdots \\
&+\frac{1}{n!}\{\cdots\{\mathcal{N}, \underbrace{F^{(1)}\}\cdots, F^{(1)}}_{n}\} + \frac{1}{n!}\{\cdots\{\breve{P}, \underbrace{F^{(1)}\}\cdots, F^{(1)}}_{n}\} \\
&+\frac{1}{n!}\{\cdots\{P, \underbrace{F^{(1)}\}\cdots, F^{(1)}}_{n}\} + \cdots .
\end{aligned}$$

由于$\mathcal{N}$, $\breve{P}$, P, $F^{(1)}$, $\grave{P}^{(1)}$都具有规范不变性，且不依赖变量$(q_n, \bar{q}_n)_{n\in\mathcal{J}}$，故根据附录中的引理A.4和A.5，$P^{(1)}$也具有这些性质。

对$P - R = \displaystyle\sum_{2|l|+|\alpha|+|\beta|\ge 3} P_{kl\alpha\beta} e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle} I^l q^\alpha \bar{q}^\beta$，我们有

$$\|P_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}^{(1)}} \le \begin{cases} \frac{1}{4}\varepsilon^{(2)} e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \le 2 \\ e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \ge 3 \end{cases}.$$

此处，我们应用估计$|I| \le s^{(1)} \le \frac{1}{4}\varepsilon^{(1)}$来处理$|\alpha|+|\beta| \le 2$且$2|l|+|\alpha|+|\beta| \ge 3$的情形。

余下各项都是通过若干重Poisson括号所得，其衰减性蕴含于下列引理之中。

引理 3.4 对于充分小的ε，$\{P, F^{(1)}\}$满足

$$\|\{P, F^{(1)}\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_{3\eta},\mathcal{O}_+} \le \begin{cases} \varepsilon^{\frac{5}{4}} e^{-\rho^{(1)} n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \le 2 \\ \varepsilon^{\frac{1}{4}} e^{-\rho^{(1)} n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta| \ge 3 \end{cases}.$$

证明： 通过直接计算可得

$$\{P,F^{(1)}\}_{\alpha\beta} = \mathrm{i}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\(\check\alpha,\check\beta)+(\hat\alpha,\hat\beta)=(\alpha,\beta)}}\left(P_{\check\alpha+e_n,\check\beta}F^{(1)}_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}-P_{\check\alpha,\check\beta+e_n}F^{(1)}_{\hat\alpha+e_n,\hat\beta}\right) \tag{3.63}$$

$$+\sum_{(\check\alpha,\check\beta)+(\hat\alpha,\hat\beta)=(\alpha,\beta)}\left\{P_{\check\alpha\check\beta},F^{(1)}_{\hat\alpha\hat\beta}\right\}. \tag{3.64}$$

- (3.63)中的各项
  首先考虑$P_{\check\alpha+e_n,\check\beta}F^{(1)}_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}$。

  i) $|\alpha|+|\beta|\le 2$
  根据$F^{(1)}$的构造过程，$|\hat\alpha|+|\hat\beta+e_n|=1$或2，因此我们有

  $$|\check\alpha+e_n|+|\check\beta|=|\alpha|+|\beta|+1-(|\hat\alpha|+|\hat\beta|)\le 3. \tag{3.65}$$

  若$|\check\alpha+e_n|+|\check\beta|\le 2$，那么，注意到$n^*_{\alpha\beta}\le\max\{n^*_{\check\alpha+e_n,\check\beta},n^*_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\}$，

  $$\|P_{\check\alpha+e_n,\check\beta}F^{(1)}_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le\varepsilon e^{-\rho n^*_{\check\alpha+e_n,\check\beta}}\cdot\varepsilon^{\frac34}e^{-\rho n^*_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}}\le\varepsilon^{\frac74}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}. \tag{3.66}$$

  若$|\check\alpha+e_n|+|\check\beta|=3$，则根据(3.65)，$(\hat\alpha,\hat\beta)=(0,0),(\check\alpha,\check\beta)=(\alpha,\beta)$。由范数$\|X_P\|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}$的定义以及$F^{(1)}$的构造，

  $$\|P_{\alpha+e_n,\beta}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}}\le e^{-\rho n^*_{\alpha+e_n,\beta}},\quad \|F^{(1)}_{0,e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le s\varepsilon^{\frac34}e^{-\rho|n|}.$$

  因此，注意到$n^*_{\alpha\beta}\le\max\{n^*_{\alpha+e_n,\beta},|n|\}$，则

  $$\|P_{\alpha+e_n,\beta}F^{(1)}_{0,e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le s\varepsilon^{\frac34}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}\le\frac14\varepsilon^{\frac74}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}. \tag{3.67}$$

  ii) $|\alpha|+|\beta|\ge 3$
  与以上的论证类似，

  $$\|P_{\check\alpha+e_n,\check\beta}F^{(1)}_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le e^{-\rho n^*_{\check\alpha+e_n,\check\beta}}\cdot\varepsilon^{\frac34}e^{-\rho n^*_{\hat\alpha,\hat\beta+e_n}}\le\varepsilon^{\frac34}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}. \tag{3.68}$$

  对$P_{\check\alpha,\check\beta+e_n}F^{(1)}_{\hat\alpha+e_n,\hat\beta}$做同样的分析，我们就完成了对(3.63)中各项的估计.

- (3.64)中的各项
  由引理A.2以及不等式$n^*_{\alpha\beta}\le\max\{n^*_{\check\alpha\check\beta},n^*_{\hat\alpha\hat\beta}\}$，我们有

  $$\|\{P_{\check\alpha\check\beta},F^{(1)}_{\hat\alpha\hat\beta}\}\|_{\mathcal{D}_{3\eta}}\le c(r-r^{(1)})^{-1}\eta^{-2}\begin{cases}\varepsilon^{\frac74}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le 2\\ \varepsilon^{\frac34}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\ge 3\end{cases}. \tag{3.69}$$

将(3.66) – (3.69)相结合，并根据基本事实$|\hat{\alpha}|+|\hat{\beta}|\le 2$，可知存在$c_8>0$使得

$$\|\{P,F^{(1)}\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_{3\eta}}\le c_8(r-r^{(1)})^{-1}\eta^{-2}(\rho-\rho^{(1)})^{-2}\begin{cases}\varepsilon^{\frac{7}{4}}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\le 2\\ \varepsilon^{\frac{3}{4}}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\ge 3\end{cases}.$$

此外，如果

(C8)：$c_8(r-r^{(1)})^{-1}\eta^{-2}(\rho-\rho^{(1)})^{-2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{4}$，

那么引理3.4得证。 □

由(3.28), (3.32)以及(3.33)，明显可见

$$\{\mathcal{N},F^{(1)}\}=e^{(1)}+\langle\omega^{(1)},I\rangle+\langle W^{(1)}q,\bar{q}\rangle+\grave{P}^{(1)}-R$$

的系数满足$\|\{\mathcal{N},F^{(1)}\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le c\varepsilon e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}}$。所以，我们有以下引理，其证明类似于引理3.4。

引理 3.5 对于充分小的ε，$\{\{\mathcal{N},F^{(1)}\},F^{(1)}\}$满足

$$\|\{\{\mathcal{N},F^{(1)}\},F^{(1)}\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_{3\eta},\mathcal{O}_+}\le\frac{1}{4}\varepsilon^{\frac{6}{5}}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}}.$$

引理 3.6 对于充分小的ε，$\{\breve{P},F^{(1)}\}$满足

$$\|\{\breve{P},F^{(1)}\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_3,\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{\frac{1}{4}}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}},\quad |\alpha|+|\beta|\ge 3.$$

证明：我们有

$$\{\breve{P},F^{(1)}\}_{\alpha\beta}=\mathrm{i}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\(\breve{\alpha},\breve{\beta})+(\hat{\alpha},\hat{\beta})=(\alpha,\beta)}}\left(\breve{P}_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}F^{(1)}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}-\breve{P}_{\breve{\alpha},\breve{\beta}+e_n}F^{(1)}_{\hat{\alpha}+e_n,\hat{\beta}}\right).\tag{3.70}$$

对于(3.70)中的$\breve{P}_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}F^{(1)}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}$，由于$|\hat{\alpha}|+|\hat{\beta}+e_n|=1$或$2$，且$|\breve{\alpha}+e_n|+|\breve{\beta}|\ge 4$，则$|\alpha|+|\beta|=|\breve{\alpha}|+|\breve{\beta}|+|\hat{\alpha}|+|\hat{\beta}|\le 3$。

注意到$n^*_{\alpha\beta}\le\max\{n^*_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}\,n^*_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}\}$，以及

$$n^*_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}=\max\{n^+_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}},-n^-_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}\},\quad n^*_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}=\max\{n^+_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n},-n^-_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}\}.$$

那么$n^+_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}-n^-_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}+n^*_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}\ge n^*_{\alpha\beta}$，且

$$\left\|\breve{P}_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}F^{(1)}_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}\right\|_{\mathcal{D}_3}\le e^{-\rho(n^+_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}}-n^-_{\breve{\alpha}+e_n,\breve{\beta}})}\cdot\varepsilon^{\frac{3}{4}}e^{-\rho n^*_{\hat{\alpha},\hat{\beta}+e_n}}\le\varepsilon^{\frac{3}{4}}e^{-\rho n^*_{\alpha\beta}}.$$

对(3.70)中的$\breve{P}_{\breve{\alpha},\breve{\beta}+e_n}F^{(1)}_{\hat{\alpha}+e_n,\hat{\beta}}$可做类似估计，因此，若**(C8)**成立，

$$\|\{\breve{P},F^{(1)}\}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_3}\le c_8(\rho-\rho^{(1)})^{-2}\varepsilon^{\frac{3}{4}}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}}\le\varepsilon^{\frac{1}{4}}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}},\quad |\alpha|+|\beta|\ge 3.$$

□

总结以上的分析过程，$P^{(1)}$的衰减性可表示为

命题 3.2 对于充分小的ε，$P^{(1)}=\sum_{\alpha,\beta}P^{(1)}_{\alpha\beta}(\theta,I;\xi)q^\alpha\bar{q}^\beta$满足

$$\|P^{(1)}_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}^{(1)},\mathcal{O}_+}\leq\begin{cases}\varepsilon^{(1)}e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\leq 2\\ e^{-\rho^{(1)}n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha|+|\beta|\geq 3\end{cases}.$$

§3.3.4 一列辛变换

完成了对假设条件**(A4)**和**(A5)**的验证，我们就进行了KAM迭代的一个子过程。假设我们已经到了第j个子过程，$j=1,\cdots,J=\left[\frac{5}{2}\varepsilon^{-\frac{a}{2}}\right]$，我们得到Hamilton函数

$$\begin{aligned}H^{(j-1)}&=H\circ\Phi^1_{F^{(1)}}\circ\cdots\circ\Phi^1_{F^{(j-1)}}\\&=\mathcal{N}+\breve{P}+\sum_{i=1}^{j-1}\left(e^{(i)}+\langle\omega^{(i)},I\rangle+\langle W^{(i)}q,\bar{q}\rangle\right)+P^{(j-1)},\end{aligned}$$

特别地，带上标“(0)”的数量表示第1个子过程进行之前的数量。令

$$R^{(j-1)}:=\sum_{\substack{k\\2|l|+|\alpha|+|\beta|\leq 2}}P^{(j-1)}_{kl\alpha\beta}e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}I^lq^\alpha\bar{q}^\beta.\tag{3.71}$$

如命题3.1中所论述的，在$\mathcal{O}_+$上，以下同调方程

$$\{\mathcal{N},F^{(j)}\}+R^{(j-1)}=e^{(j)}+\langle\omega^{(j)},I\rangle+\langle W^{(j)}q,\bar{q}\rangle+\dot{P}^{(j)},\tag{3.72}$$

可解，且$F^{(j)}$, $\omega^{(j)}$, $W^{(j)}$, $\dot{P}^{(j)}$分别具有类似于$F^{(1)}$, $\omega^{(1)}$, $W^{(1)}$, $\dot{P}^{(1)}$的性质。这样我们可以得到

$$H^{(j)}=H^{(j-1)}\circ\Phi^1_{F^{(j)}}=\mathcal{N}+\breve{P}+\sum_{i=1}^{j}\left(e^{(i)}+\langle\omega^{(i)},I\rangle+\langle W^{(i)}q,\bar{q}\rangle\right)+P^{(j)}.$$

对于$F^{(j)}$的估计以及对$P^{(j)}$的假设条件验证，可以像§3.3.3中那样类似进行。

命题 3.3 考虑*(3.14)*中的*Hamilton*函数H。存在一列辛变换$\Phi^{(j)}=\Phi^1_{F^{(j)}}$，分别由相应的实解析*Hamilton*函数$F^{(j)}$生成，使得

$$H^{(j)}=H\circ\Phi^{(1)}\circ\cdots\circ\Phi^{(j)}=\mathcal{N}+\breve{P}+G_j+P^{(j)},\quad j=1,\cdots,J,$$

在$\mathcal{D}^{(j)}=\mathcal{D}_{d,\rho_+}(r^{(j)},s^{(j)})$上实解析，其中$G_j=\sum_{i=1}^{j}\big(e^{(i)}+\langle\omega^{(i)},I\rangle+\langle W^{(i)}q,\bar{q}\rangle\big)$。对于$i=1,2,3,4$，$\eta=\varepsilon^{\frac{1}{5}}$，令

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i^{(j)}&=\mathcal{D}_{d,\rho_+}(r^{(j+1)}+\frac{i}{4}(r^{(j)}-r^{(j+1)}),\frac{i}{4}s^{(j)}),\\ \mathcal{D}_{i\eta}^{(j)}&=\mathcal{D}_{d,\rho_+}(r^{(j+1)}+\frac{i}{4}(r^{(j)}-r^{(j+1)}),\frac{i}{4}\eta s^{(j)}).\end{aligned}$$

(a) 如*(3.71)*定义$R^{(j-1)}$，则$F^{(j)}$在$\mathcal{O}_+$上满足同调方程*(3.72)*，且

$$\begin{aligned}&\|X_{F^{(j)}}\|_{\mathcal{D}_3^{(j-1)},\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\varepsilon^{(j-1)},\\ &\Phi_{F^{(j)}}^t:\mathcal{D}_{2\eta}^{(j-1)}\to\mathcal{D}_{3\eta}^{(j-1)},\quad -1\le t\le 1,\\ &\|D\Phi_{F^{(j)}}^t-I\|_{\mathcal{D}_{1\eta}^{(j-1)}}<2\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\varepsilon^{(j-1)},\\ &\|F_{\alpha\beta}^{(j)}\|_{\mathcal{D}_3^{(j-1)},\mathcal{O}_+}\le\begin{cases}\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\varepsilon^{(j-1)}e^{-\rho^{(j-1)}n_{\alpha\beta}^*}, & |\alpha|+|\beta|\le 2\\ 0, & |\alpha|+|\beta|\ge 3\end{cases},\\ &\partial_{q_n}F^{(j)}=\partial_{\bar{q}_n}F^{(j)}\equiv 0,\quad \forall n\in\mathcal{J}.\end{aligned}$$

(b) G_j满足$\|X_{G_j}\|_{\mathcal{D}_3^{(j)},\mathcal{O}_+}\le c\varepsilon$，且对于$i=1,2,\cdots,j$，

$$\begin{aligned}&|\omega^{(i)}|_{\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{(i-1)},\\ &|W_{mn}^{(i)}|_{\mathcal{O}_+}\le\begin{cases}\varepsilon^{(i-1)}e^{-\rho^{(i-1)}\max\{|m|,|n|\}}, & |m|,|n|\le N_+,\quad m,n\notin\mathcal{J}\\ 0, & o.w.\end{cases}.\end{aligned}$$

(c) $\|X_{\breve{P}+P^{(j)}}\|_{\mathcal{D}^{(j)},\mathcal{O}_+}\le\varepsilon^{(j)}$且$P^{(j)}$满足**(A4)**和**(A5)**，其中包括

$$\begin{aligned}&\|P_{\alpha\beta}^{(j)}\|_{\mathcal{D}^{(j)},\mathcal{O}_+}\le\begin{cases}\varepsilon^{(j)}e^{-\rho^{(j)}n_{\alpha\beta}^*}, & |\alpha|+|\beta|\le 2\\ e^{-\rho^{(j)}n_{\alpha\beta}^*}, & |\alpha|+|\beta|\ge 3\end{cases}\\ &\partial_{q_n}P^{(j)}=\partial_{\bar{q}_n}P^{(j)}\equiv 0,\quad\forall n\in\mathcal{J}.\end{aligned}$$

令$s_+=s^{(J)}=2^{-3J}\varepsilon^{\frac{J}{5}}s,\ \Phi=\Phi^{(1)}\circ\cdots\circ\Phi^{(J)}$，以及

$$\mathcal{N}_+=e_++\langle\omega_+,I\rangle+\langle Tq,\bar{q}\rangle+\langle(A+W_+)q,\bar{q}\rangle,$$

其中$\Omega_+=T+A+W_+$，且

$$e_+=e+\sum_{j=1}^{J}e^{(j)},\quad \omega_+=\omega+\sum_{j=1}^{J}\omega^{(j)},\quad W_+=W+\sum_{j=1}^{J}W^{(j)}.$$

那么$\Phi:\mathcal{D}_+\to\mathcal{D}$。从对$\omega^{(j)}$和$W^{(j)}$的估计，我们可得

$$|\omega_+-\omega|_{\mathcal{O}_+}\le c\varepsilon, \tag{3.73}$$

$$|(W_+-W)_{mn}|_{\mathcal{O}_+}\le\left\{\begin{array}{cc}\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\rho}{2}\max\{|m|,|n|\}}, & |m|,|n|\le N_+,\quad m,n\notin\mathcal{J}\\ 0, & \text{o.w.}\end{array}\right. . \tag{3.74}$$

由于$W^*=W$且$(W^{(i)})^*=W^{(i)}$，所以W_+仍是Hermite矩阵。因此，(**A1**)与(**A2**)仍成立，其中$p_+=p+\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\sigma_+:=\frac{1}{3}\rho$。

令$P_+=P^{(J)}$。我们可以验证假设条件(**A4**)和(**A5**)对$P^{(J)}$成立，这类似于在§3.3.3中所进行的过程。

至此，我们完成了一个KAM步骤。

§3.4　定理3.2的证明

令$\varepsilon_0=\epsilon^{\frac{1}{4}}$, $\sigma_0=1$, $\hat{N}=|\ln\varepsilon_0|$，且$N_0=6|\ln\varepsilon_0|$, $\rho_0=N_0^{-1}$,

$$M_0=\max\left\{2^{\tilde{s}+4}C\frac{L^{\tilde{s}+1}((\tilde{s}+1)!)^2}{\tilde{\xi}},\,2\tilde{\tau},\,8,\,\frac{12(2\tau+b+3)}{\tilde{\tau}}\right\},$$

如下序列可按照[16]中的方式定义

$$\begin{aligned}&M_{\nu+1}=M_\nu^{\tilde{s}M_\nu^3}, && a_\nu=\frac{1}{\tilde{\tau}}M_\nu^{-3\tilde{s}M_\nu^3}, && \varepsilon_{\nu+1}=\varepsilon_\nu^{\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{-a_\nu/2}},\\ &N_{\nu+1}=\varepsilon_\nu^{-a_\nu}, && \rho_{\nu+1}=\varepsilon_\nu^{a_\nu}, && \sigma_{\nu+1}=\frac{1}{3}\rho_\nu.\end{aligned}$$

给定$p_0=\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}$, $r_0=r$, $s_0=s$，可定义序列

$$\begin{aligned}&p_{\nu+1}=p_\nu+\varepsilon_\nu^{\frac{1}{2}}, && K_{\nu+1}=N_{\nu+1}-(M_\nu+1)N_\nu, && J_\nu=\left[\frac{5}{2}\varepsilon_\nu^{-\frac{a_\nu}{2}}\right],\\ &r_\nu=r_0\left(1-\sum_{i=2}^{\nu+1}2^{-i}\right), && s_{\nu+1}=2^{-3J_\nu}\varepsilon_\nu^{\frac{J_\nu}{5}}s_\nu, && \gamma_\nu=\varepsilon_\nu^{\frac{1}{80}}.\end{aligned}$$

$\mathcal{D}_\nu$与$\mathcal{O}_\nu$如§3.3中所定义。

§3.4.1　迭代引理

以上的分析过程可总结如下。

引理 3.7 存在充分小的ε_0，使得如下命题对$\nu=0,1,\cdots$成立。

(a) $H_\nu = \mathcal{N}_\nu + \breve{P} + P_\nu$在$\mathcal{D}_\nu$上是实解析的，$C^1_W$地依赖于$\xi \in \mathcal{O}_\nu$，其中

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_\nu &= e_\nu + \langle \omega_\nu, I\rangle + \langle \Omega_\nu q, \bar{q}\rangle \\
&= e_\nu + \langle \omega_\nu, I\rangle + \langle (T + A + W_\nu) q, \bar{q}\rangle \\
P_\nu &= \sum_{\alpha,\beta} (P_\nu)_{\alpha\beta}(\theta, I; \xi) q^\alpha \bar{q}^\beta,
\end{aligned}
$$

满足

$$
\begin{aligned}
&(\Omega_\nu)_{mn} \equiv 0, \quad \{m, n\} \cap \mathcal{J} \neq \emptyset, \\
&|(W_\nu)_{mn}|_{\mathcal{O}_\nu} \leq \begin{cases} p_\nu e^{-\sigma_\nu \max\{|m|,|n|\}}, & |m|, |n| \leq N_\nu \\ 0, & o.w. \end{cases}, \\
&|\omega_{\nu+1} - \omega_\nu|_{\mathcal{O}_{\nu+1}} \leq \varepsilon_\nu, \\
&|(W_{\nu+1} - W_\nu)_{mn}|_{\mathcal{O}_{\nu+1}} \leq \begin{cases} \varepsilon_\nu^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho_\nu}{2}\max\{|m|,|n|\}}, & |m|, |n| \leq N_{\nu+1}, \quad m, n \notin \mathcal{J} \\ 0, & o.w. \end{cases}.
\end{aligned}
$$

此外，P_ν具有规范不变性，且$\|X_{\breve{P}+P_\nu}\|_{\mathcal{D}_\nu, \mathcal{O}_\nu} \leq \varepsilon_\nu$，

$$
\begin{aligned}
&\|(P_\nu)_{\alpha\beta}\|_{\mathcal{D}_\nu, \mathcal{O}_\nu} \leq \begin{cases} \varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha| + |\beta| \leq 2 \\ e^{-\rho_\nu n^*_{\alpha\beta}}, & |\alpha| + |\beta| \geq 3 \end{cases}, \\
&\partial_{q_n} P_\nu = \partial_{\bar{q}_n} P_\nu \equiv 0, \quad \forall n \in \mathcal{J}.
\end{aligned}
$$

(b) 对于每一ν，存在一个辛变换$\Phi_\nu : \mathcal{D}_{\nu+1} \to \mathcal{D}_\nu$ 满足

$$
\|D\Phi_\nu - Id\|_{\mathcal{D}_{\nu+1}, \mathcal{O}_{\nu+1}} \leq \varepsilon_\nu^{\frac{1}{2}},
$$

使得$H_{\nu+1} = H_\nu \circ \Phi_\nu$。

证明： 令$c_0 := 8e^{20}\max\{c_1, \cdots, c_8\}$。我们需要对$\nu = 0, 1, \cdots$验证假设条件(**C1**)–(**C8**)。注意到

$$
N_{\nu+1} = \varepsilon_\nu^{a_\nu} = \rho_{\nu+1}^{-1}, \quad \sigma_{\nu+1} = \frac{1}{3}\rho_\nu, \quad r_\nu^{(j)} - r_\nu^{(j+1)} = \frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2J_\nu}, \quad \rho_\nu^{(j)} - \rho_\nu^{(j+1)} = \frac{\rho_\nu - \rho_{\nu+1}}{2J_\nu},
$$

只需验证

(D1) $c_0 s_\nu \leq \varepsilon_\nu$,

(D2) $c_0 \left(\frac{r_\nu - r_{\nu+1}}{2J_\nu}\right)^{-(2\tau+b+1)} \left(\frac{\rho_\nu - \rho_{\nu+1}}{2J_\nu}\right)^{-2} \leq \varepsilon_\nu^{-\frac{1}{20}}$,

(D3) $c_0N_{\nu+1}^8M_\nu^8N_\nu^{20}e^{8M_\nu N_\nu\rho_\nu}\le\varepsilon_\nu^{-\frac{7}{40}}$,

(D4) $e^{-\frac{\rho_\nu K_{\nu+1}}{2J_\nu}}\le\varepsilon_\nu^{\frac{2}{5}}$,

对于$\nu=0,1,\cdots$成立。

由s_0的选取，**(D1)**在$\nu=0$时明显成立。假设其对于某一ν成立，那么

$$c_0s_{\nu+1}=2^{-3J_\nu}\varepsilon_\nu^{\frac{J_\nu}{5}}\cdot c_0s_\nu<2^{-3J_\nu}\varepsilon_\nu^{\frac{J_\nu}{5}}\cdot\varepsilon_\nu<\varepsilon_{\nu+1}.$$

因此**(D1)**对所有ν成立。

选取充分小的ε_0使得

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{20}-\frac{1}{2}a_0(2\tau+b+3)}\le\frac{1}{c_0}\left(\frac{r_0}{20}\right)^{2\tau+b+1}\left(\frac{1-\varepsilon_0^{a_0}}{5}\right)^2.$$

此处我们应用了不等式$M_0\ge\frac{12}{\tilde{\tau}}(2\tau+b+3)$以及$a_0=M_0^{-3\tilde{s}M_0^3}$使得$\frac{1}{20}-\frac{1}{2}a_0(2\tau+b+3)>0$。那么，回想$r_\nu-r_{\nu+1}=\frac{r_0}{2^{2+\nu}}$和$J_\nu=\left[\frac{5}{2}\varepsilon_\nu^{-\frac{a_\nu}{2}}\right]$，可得

$$c_0\left(\frac{r_0-r_1}{2J_0}\right)^{-(2\tau+b+1)}\left(\frac{\rho_0-\rho_1}{2J_0}\right)^{-2}\le\varepsilon_0^{-\frac{1}{20}},$$

即**(D2)**在$\nu=0$时是成立的。由于对$\nu\ge1$以及充分小的ε_0，有

$$\varepsilon_\nu^{\frac{1}{40}-\frac{1}{2}a_\nu(2\tau+b+3)}\ll\varepsilon_0^{\left(\frac{6}{5}\right)^\nu}\ll\frac{1}{2^{\nu(2\tau+b+1)}c_0}\left(\frac{r_0}{20}\right)^{2\tau+b+1},\quad\varepsilon_\nu^{\frac{1}{40}}\ll\left(\frac{\varepsilon_{\nu-1}^{a_{\nu-1}}-\varepsilon_\nu^{a_\nu}}{5}\right)^2,$$

则

$$c_0\left(\frac{r_\nu-r_{\nu+1}}{2J_\nu}\right)^{-(2\tau+b+1)}\left(\frac{\rho_\nu-\rho_{\nu+1}}{2J_\nu}\right)^{-2}\le\varepsilon_\nu^{-\frac{1}{20}}.$$

因此，**(D2)**成立。

在文献[16]的第6部分，ε_ν的充分小性，即引理D.1中的不等式(D.3)，得以验证，那么其他假设条件直接可得，包括不等式

$$\Gamma_\nu N_\nu^2e^{6M_\nu N_\nu\rho_\nu}\le\varepsilon_\nu^{-\frac{1}{8}},$$

其中Γ_ν是随M_ν超指数增长的某一常数。由于本文中的M_ν，N_ν，ρ_ν和ε_ν与[16]中的定义方式相同，我们可以应用这一不等式。所以**(D3)**成立。

由ρ_ν，a_ν和ε_ν的定义，有

$$\rho_\nu\varepsilon_\nu^{-\frac{1}{2}a_\nu}>\ln\frac{1}{\varepsilon_\nu}.$$

那么**(D4)**对$\nu=0,1,\cdots$都成立。 □

§3.4.2 收敛性

取定$x\in\tilde{\mathcal{X}}$，其中$\tilde{\mathcal{X}}$为定理1.6中所定义。这就意味着，定理1.6中所提到的分块会在某一步骤之后不再增长，即对每一$n\in\mathbb{Z}$，存在$\nu_0(n)$使得

$$\Lambda^{\nu+1}(n)=\Lambda^{\nu}(n),\quad \forall\nu\geq\nu_0(n).$$

在这种情形下，n处的局部衰减速度不必再随着ν而减小（而ρ_ν是对应所有$n\in\mathbb{Z}$的衰减速度的全局下界）。

定义$\Psi^\nu=\Phi_0\circ\Phi_1\circ\cdots\circ\Phi_{\nu-1}$, $\nu=1,2,\cdots$。以上的归纳引理表明$\Psi^\nu:\mathcal{D}_{\nu+1}\to\mathcal{D}_0$，以及

$$H_0\circ\Psi^\nu=H_\nu=\mathcal{N}_\nu+\breve{P}+P_\nu.$$

令$\mathcal{O}_\varepsilon=\cap_{\nu=0}^{\infty}\mathcal{O}_\nu$。利用引理3.3以及一些标准命题，可知在$\mathcal{D}_{d,0}(\frac{1}{2}r_0,0)\times\mathcal{O}_\varepsilon$上，$H_\nu$, $\mathcal{N}_\nu$, P_ν, Ψ^ν, e_ν, ω_ν以及W_ν分别一致收敛于极限H_∞, $\mathcal{N}_\infty$, P_∞, Ψ^∞, e_∞, ω_∞以及W_∞ 很明显，在此情形下，

$$\mathcal{N}_\infty=e_\infty+\langle\omega_\infty,I\rangle+\langle(T+A+W_\infty)q,\bar{q}\rangle,$$

其中$\Omega_\infty=T+A+W_\infty$满足当$m$或$n\in\mathcal{J}$时$(\Omega_\infty)_{mn}\equiv0$。由于$\|X_{P_\nu}\|_{\mathcal{D}_\nu,\mathcal{O}_\nu}\leq\varepsilon_\nu$，且$\varepsilon_\nu\to0$，则$\|X_{P_\infty}\|_{\mathcal{D}_{d,0}(\frac{1}{2}r_0,0),\mathcal{O}_\varepsilon}=0$。

因$H_0\circ\Psi^\nu=H_\nu$，我们有$\Phi_{H_0}^t\circ\Psi^\nu=\Psi^\nu\circ\Phi_{H_\nu}^t$，其中$\Phi_{H_0}^t$表示Hamilton向量场$X_{H_0}$的相流。$\Psi^\nu$与$X_{H_\nu}$的一致收敛性表明，

$$\Phi_{H_0}^t\circ\Psi^\infty=\Psi^\infty\circ\Phi_{H_\infty}^t,\quad \Psi^\infty:\mathcal{D}_{d,0}(\frac{1}{2}r_0,0)\to\mathcal{D}_0.$$

因此，

$$\Phi_{H_0}^t(\Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\}))=\Psi^\infty\Phi_{\mathcal{N}_\infty}^t(\mathbb{T}^b\times\{\xi\})=\Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\}),\quad\forall\xi\in\mathcal{O}_\varepsilon.$$

从而可知，$\Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\})$是原始的扰动Hamilton系统$H_0$在$\xi\in\tilde{\mathcal{O}}$上的一个嵌入不变环面。$\Psi^\infty(\mathbb{T}^b\times\{\xi\})$所对应的频率$\omega_\infty(\xi)$较原频率$\omega(\xi)$稍有改变。

§3.4.3 测度估计

在KAM迭代的第ν步中，我们需对固定的$x\in\tilde{\mathcal{X}}$去掉以下共振的参数集

$$\mathcal{R}_k^\nu:=\mathcal{R}_k^{\nu1}\bigcup\left(\bigcup_{n\in\Lambda^\nu}\mathcal{R}_{kn}^{\nu2}\right)\bigcup\left(\bigcup_{m,n\in\Lambda^\nu}\mathcal{R}_{kmn}^{\nu3}\right)\bigcup\left(\bigcup_{m,n\in\Lambda^\nu}\mathcal{R}_{kmn}^{\nu4}\right),\quad k\neq0$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_k^{\nu 1} &:= \left\{\xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_\nu\rangle| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau}\right\}, \\
\mathcal{R}_{kn}^{\nu 2} &:= \left\{\xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_\nu\rangle + \mu_n^\nu| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau N_{\nu+1}^2}\right\}, \\
\mathcal{R}_{kmn}^{\nu 3} &:= \left\{\xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_\nu\rangle + \mu_m^\nu + \mu_n^\nu| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau N_{\nu+1}^4}\right\}, \\
\mathcal{R}_{kmn}^{\nu 4} &:= \left\{\xi \in \mathcal{O}_\nu : |\langle k, \omega_\nu\rangle + \mu_m^\nu - \mu_n^\nu| < \frac{\gamma_\nu}{|k|^\tau N_{\nu+1}^4}\right\},
\end{aligned}$$

而$\{\mu_j^\nu\}_{j\in\Lambda^\nu}$为$\tilde{D}_{\Lambda^\nu}^\nu + \tilde{A}_\nu$的特征值。很明显，$\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_\varepsilon \subseteq \bigcup_{\nu\geq 0}\bigcup_{k\neq 0}\mathcal{R}_k^\nu$。

回想ω_0是一个关于ξ的微分同胚，并结合估计(3.26), (3.73)以及(3.74)，可知对于集合$\mathcal{R}_{kmn}^{\nu 4}$，

$$|\partial_\xi(\langle k, \omega_\nu\rangle + \mu_m^\nu - \mu_n^\nu)| \geq |\partial_\xi\langle k, \omega_0\rangle| - \varepsilon_0^{\frac{1}{4}}|k| - p = O(|k|).$$

而$\mathcal{R}_k^{\nu 1}, \mathcal{R}_{kn}^{\nu 2}, \mathcal{R}_{kmn}^{\nu 3}$的情形可类似处理。因此

$$\left|\mathcal{R}_k^{\nu 1}\bigcup\left(\bigcup_{n\in\Lambda^\nu}\mathcal{R}_{kn}^{\nu 2}\right)\bigcup\left(\bigcup_{m,n\in\Lambda^\nu}\mathcal{R}_{kmn}^{\nu 3}\right)\bigcup\left(\bigcup_{m,n\in\Lambda^\nu}\mathcal{R}_{kmn}^{\nu 4}\right)\right| \leq \frac{c\gamma_\nu}{|k|^{\tau+1}}.$$

由$\tau \geq b$可得，

$$|\mathcal{O}_0 \setminus \mathcal{O}_\varepsilon| \leq \left|\bigcup_{\nu\geq 0}\bigcup_{k\neq 0}\mathcal{R}_k^\nu\right| \leq c\sum_{\nu\geq 0}\sum_{k\neq 0}\frac{\gamma_\nu}{|k|^{\tau+1}} = c\sum_{\nu\geq 0}\gamma_\nu \sim \gamma_0 = \varepsilon_0^{\frac{1}{80}}.$$

附录一　Hamiltonian向量场与Poisson括号

对于$d,\ \rho,\ r,\ s>0$，令F和G为$\mathcal{D}=\mathcal{D}_{d,\rho}(r,s)$上的两个实解析函数，且都是$C_W^1$地依赖于参数$\xi\in\mathcal{O}$。

引理 A.1 范数$\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$满足*Banach*代数性质，即

$$\|FG\|_{\mathcal{D}}\leq\|F\|_{\mathcal{D}}\|G\|_{\mathcal{D}}.$$

证明：由于

$$(FG)_{kl\alpha\beta}=\sum_{\substack{\check{k}+\hat{k}=k,\ \check{l}+\hat{l}=l\\ \check{\alpha}+\hat{\alpha}=\alpha,\ \check{\beta}+\hat{\beta}=\beta}}F_{\check{k}\check{l}\check{\alpha}\check{\beta}}G_{\hat{k}\hat{l}\hat{\alpha}\hat{\beta}},$$

我们有

$$\begin{aligned}\|FG\|_{\mathcal{D}}&=\sup_{\mathcal{D}}\sum_{k,l,\alpha,\beta}|(FG)_{kl\alpha\beta}|_{\mathcal{O}}|q^{\alpha}||\bar{q}^{\beta}||I^{l}|e^{|k||\mathrm{Im}\theta|}\\&\leq\sup_{\mathcal{D}}\sum_{k,l,\alpha,\beta}\sum_{\substack{\check{k}+\hat{k}=k,\ \check{l}+\hat{l}=l\\ \check{\alpha}+\hat{\alpha}=\alpha,\ \check{\beta}+\hat{\beta}=\beta}}|F_{\check{k}\check{l}\check{\alpha}\check{\beta}}G_{\hat{k}\hat{l}\hat{\alpha}\hat{\beta}}|_{\mathcal{O}}|q^{\alpha}||\bar{q}^{\beta}||I^{l}|e^{(|\check{k}|+|\hat{k}|)|\mathrm{Im}\theta|}\\&\leq\|F\|_{\mathcal{D}}\|G\|_{\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

□

引理 A.2（广义Cauchy不等式）*Hamiltonian*向量场X_F的各部分满足: $0<r'<r,\ 0<\rho'<\rho$,

$$\begin{aligned}&\|\partial_{\theta}F\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r',s)}\leq\frac{c}{r-r'}\|F\|_{\mathcal{D}},\\&\|\partial_{I}F\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r,\frac{s}{2})}\leq\frac{c}{s^{2}}\|F\|_{\mathcal{D}},\\&\sup_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r,\frac{s}{2})}\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\left(\|\partial_{q_n}F\|_{\mathcal{O}}+\|\partial_{\bar{q}_n}F\|_{\mathcal{O}}\right)\langle n\rangle^{d}e^{|n|\rho'}\leq\frac{c}{s(\rho-\rho')}\|F\|_{\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

证明：我们只需证明第三个不等式，另外两个类似。取定$\omega\in\ell^1_{d,\rho}(\mathbb{Z}_1)\setminus\{0\}$，那么

$$f(t)=F(*,*,q+t\omega,*)$$

是圆盘$\{z\in\mathbb{C}:|z|<\frac{s}{\|\omega\|_{d,\rho}}\}$上的解析函数。由通常的Cauchy估计，可知

$$|f'(0)|=\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\omega_n\cdot\partial_{q_n}F\right|\leq\frac{c}{s}\|F\|_{\mathcal{D}}\cdot\|\omega\|_{d,\rho}.$$

作为$\ell^1_{d,\rho}(\mathbb{Z}_1)$空间上的线性算子，$\partial_q F$就满足

$$\|\partial_q F\|_{\mathrm{op}}:=\sup_{\omega\neq 0}\frac{\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}\omega_n\cdot\partial_{q_n}F\right|}{\|\omega\|_{d,\rho}}\leq\frac{c}{s}\|F\|_{\mathcal{D}}.$$

令$\|\omega\|_{d,\rho}=\frac{s}{2}$，那么

$$|\partial_{q_n}F|\leq\sup_{\|\omega\|_{d,\rho}=\frac{s}{2}}\frac{|\partial_{q_n}F|\cdot|\omega_n|}{\|\omega\|_{d,\rho}}\leq\frac{\|\partial_q F\|_{\mathrm{op}}|\omega_n|}{\frac{s}{2}}\leq\frac{c}{s}\|F\|_{\mathcal{D}}\langle n\rangle^{-d}e^{-|n|\rho}.$$

因此，对任意$0<\rho'<\rho$，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}|\partial_{q_n}F|\langle n\rangle^d e^{|n|\rho'}\leq\frac{c}{s}\|F\|_{\mathcal{D}}\langle n\rangle^d e^{-|n|(\rho-\rho')}\leq\frac{c}{s(\rho-\rho')}\|F\|_{\mathcal{D}}.$$

对于$\tilde{F}=\sum_{k,l,\alpha,\beta}(\partial_\xi F_{kl\alpha\beta})I^l e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}q^\alpha\bar{q}^\beta$，类似可证

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_1}|\partial_{q_n}\tilde{F}|e^{|n|\rho'}\leq\frac{c}{s(\rho-\rho')}\|F\|_{\mathcal{D}}.$$

由于在以上过程中，$\xi\in\mathcal{O}$以及$(\theta,I,q,\bar{q})\in\mathcal{D}_{d,\rho}(r,\frac{s}{2})$是任意取定的，第三个不等式得证。 □

引理 A.3 若$\|X_F\|_{\mathcal{D}}<\varepsilon'$，$\|X_G\|_{\mathcal{D}}<\varepsilon''$，则对任意$0<\zeta<r$以及$0<\eta\ll 1$，有$\|X_{\{F,G\}}\|_{\mathcal{D}_{d,\rho}(r-\zeta,\eta s)}<c\zeta^{-1}\eta^{-2}\varepsilon'\varepsilon''$。

证明过程详见[21]。

引理 A.4 若实解析函数F和G都具有规范不变性，则$\{F,G\}$仍具有规范不变性。

证明：F与G可被写作

$$F=\sum_{k,\alpha,\beta}F_{k\alpha\beta}(I;\xi)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}q^\alpha\bar{q}^\beta,\quad G=\sum_{k,\alpha,\beta}G_{k\alpha\beta}(I;\xi)e^{\mathrm{i}\langle k,\theta\rangle}q^\alpha\bar{q}^\beta,$$

其中系数满足，若$\sum_{j=1}^{b} k_i + |\alpha| - |\beta| \neq 0$，则$F_{k\alpha\beta} = G_{k\alpha\beta} \equiv 0$。经直接计算，可得

$$
\begin{aligned}
\{F, G\}_{k\alpha\beta} \;=\; & \mathrm{i} \sum_{\substack{\check{k}+\hat{k}=k \\ \check{\alpha}+\hat{\alpha}=\alpha \\ \check{\beta}+\hat{\beta}=\beta}} \Big(\langle \partial_I F_{\check{k}\check{\alpha}\check{\beta}}, \hat{k} \rangle G_{\hat{k}\hat{\alpha}\hat{\beta}} - \langle \check{k}, \partial_I G_{\hat{k}\hat{\alpha}\hat{\beta}} \rangle F_{\check{k}\check{\alpha}\check{\beta}} \Big) \qquad \text{(A.1)} \\
& + \mathrm{i} \sum_{\substack{\check{k}+\hat{k}=k \\ \check{\alpha}+\hat{\alpha}=\alpha \\ \check{\beta}+\hat{\beta}=\beta}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Big(F_{\check{k}(\check{\alpha}+e_m)\check{\beta}} G_{\hat{k}\hat{\alpha}(\hat{\beta}+e_m)} - F_{\check{k}\check{\alpha}(\check{\beta}+e_m)} G_{\hat{k}(\hat{\alpha}+e_m)\hat{\beta}} \Big). \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

以上求和式中，如果$\sum_{j=1}^{b} k_i + |\alpha| - |\beta| \neq 0$，那么

$$
\sum_{j=1}^{b} \check{k}_j + |\check{\alpha}| - |\check{\beta}| = \sum_{j=1}^{b} \hat{k}_j + |\hat{\alpha}| - |\hat{\beta}| = 0,
$$

或者

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{b} \check{k}_j + |\check{\alpha} + e_m| - |\check{\beta}| &= \sum_{j=1}^{b} \hat{k}_j + |\hat{\alpha}| - |\hat{\beta} + e_m| = 0, \\
\sum_{j=1}^{b} \check{k}_j + |\check{\alpha}| - |\check{\beta} + e_m| &= \sum_{j=1}^{b} \hat{k}_j + |\hat{\alpha} + e_m| - |\hat{\beta}| = 0
\end{aligned}
$$

都是不可能发生的。这就意味着，(A.1)和(A.2)中的每一项都$\equiv 0$。由此，引理A.4得证。 □

引理 A.5 *若存在$n_* \in \mathbb{Z}$使得*

$$
\partial_{q_{n_*}} F = \partial_{\bar{q}_{n_*}} F = \partial_{q_{n_*}} G = \partial_{\bar{q}_{n_*}} G \equiv 0,
$$

那么$\partial_{q_{n_*}} \{F, G\} = \partial_{\bar{q}_{n_*}} \{F, G\} \equiv 0$。

证明： 由于

$$
\begin{aligned}
\partial_{q_{n_*}} \{F, G\} &= \partial_{q_{n_*}} \left(\langle \partial_I F,\, \partial_\theta G \rangle - \langle \partial_\theta F,\, \partial_I G \rangle + \mathrm{i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\partial_{q_m} F \cdot \partial_{\bar{q}_m} G - \partial_{\bar{q}_m} F \cdot \partial_{q_m} G \right) \right) \\
&= \big\langle \partial_I (\partial_{q_{n_*}} F),\, \partial_\theta (\partial_{q_{n_*}} G) \big\rangle - \big\langle \partial_\theta (\partial_{q_{n_*}} F),\, \partial_I (\partial_{q_{n_*}} G) \big\rangle \\
&\quad + \mathrm{i} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \big(\partial_{q_m} (\partial_{q_{n_*}} F) \cdot \partial_{\bar{q}_m} (\partial_{q_{n_*}} G) - \partial_{\bar{q}_m} (\partial_{q_{n_*}} F) \cdot \partial_{q_m} (\partial_{q_{n_*}} G) \big) \\
&\equiv 0
\end{aligned}
$$

且类似地，$\partial_{\bar{q}_{n_*}} \{F, G\} \equiv 0$，引理A.5得证。 □

附录二　无穷维矩阵的衰减性质

引理 B.1 给定矩阵$G=(G_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}}$和$F=(F_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}}$，并令$K=GF$。

(1) 如果$|G_{mn}|\le c_Ge^{-\sigma_G|m-n|}$, $|F_{mn}|\le c_Fe^{-\sigma_F|m-n|}$ 对某$c_G,\, c_F,\, \sigma_G,\, \sigma_F>0$成立，那么对任意$0<\sigma_K<\min\{\sigma_G,\, \sigma_F\}$，以及$c_K=c\cdot c_Gc_F(\min\{\sigma_G,\, \sigma_F\}-\sigma_K)^{-1}$，有

$$|K_{mn}|\le c_Ke^{-\sigma_K|m-n|};$$

(2) 如果$|G_{mn}|\le c_Ge^{-\sigma_G\max\{|m|,|n|\}}$, $|F_{mn}|\le c_Fe^{-\sigma_F|m-n|}$，那么

$$|K_{mn}|\le c_Ke^{-\sigma_K\max\{|m|,|n|\}};$$

(3) 如果$|G_{mn}|\le c_Ge^{-\sigma_G|m-n|}$, $|F_{mn}|\le c_Fe^{-\sigma_F\max\{|m|,|n|\}}$，那么

$$|K_{mn}|\le c_Ke^{-\sigma_K\max\{|m|,|n|\}};$$

(4) 如果$|G_{mn}|\le c_Ge^{-\sigma_G\max\{|m|,|n|\}}$, $|F_{mn}|\le c_Fe^{-\sigma_F\max\{|m|,|n|\}}$，那么

$$|K_{mn}|\le c_Ke^{-\sigma_K\max\{|m|,|n|\}}.$$

此外，如果$\sigma_G\ne\sigma_F$，则以上结论对于

$$\sigma_K=\min\{\sigma_G,\, \sigma_F\},\quad c_K=c\cdot c_Gc_F|\sigma_G-\sigma_F|^{-1}$$

也成立。

证明：由于$K=GF$的矩阵元素可以表示为$K_{mn}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}G_{ml}F_{ln}$，我们可知，在情形(1)中，对任意$0<\sigma_K<\min\{\sigma_G,\sigma_F\}$，

$$\begin{aligned}
|(GF)_{mn}| &\le \sum_{l\in\mathbb{Z}}|G_{ml}||F_{ln}|\\
&\le c_Gc_F\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{-\sigma_G|m-l|}e^{-\sigma_F|l-n|}\\
&\le c_Gc_Fe^{-\sigma_K|m-n|}\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{-(\sigma_G-\sigma_K)|m-l|}e^{-(\sigma_F-\sigma_K)|l-n|}\\
&\le c\cdot c_Gc_F(\min\{\sigma_G,\, \sigma_F\}-\sigma_K)^{-1}e^{-\sigma_K|m-n|}.
\end{aligned}$$

此处我们应用了不等式

$$|m-l|+|l-n|\geq |m-n|.$$

此外，若$\sigma_G\neq\sigma_F$，不妨假设$0<\sigma_G<\sigma_F$，那么

$$\begin{aligned}|(GF)_{mn}| &\leq c_Gc_F\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{-\sigma_G|m-l|}e^{-\sigma_F|l-n|}\\ &\leq c_Gc_Fe^{-\sigma_G|m-n|}\sum_{l\in\mathbb{Z}}e^{-(\sigma_F-\sigma_G)|l-n|}\\ &\leq c\cdot c_Gc_F(\sigma_F-\sigma_G)^{-1}e^{-\sigma_G|m-n|}.\end{aligned}$$

至于情形(2) – (4)，相应的结果可以通过

$$\begin{aligned}&|m-l|+\max\{|l|,|n|\}\geq\max\{|m|,|n|\},\\ &\max\{|m|,|l|\}+\max\{|l|,|n|\}\geq\max\{|m|,|n|\},\end{aligned}$$

类似得到。

因此，引理B.1得以证明。 □

注释 B.1 在情形(3)和(4)中，如果将满足$|F_{mn}|\leq c_Fe^{-\sigma_F\max\{|m|,|n|\}}$的矩阵$F$替换为满足$|f_n|\leq c_fe^{-\sigma_f|n|}$的向量$f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，那么对于向量$Gf$，我们有

$$|(Gf)_n|\leq c_Ke^{-\sigma_K|n|}.$$

附录三　定理1.4的证明

对于某个$R>0$，令$\mathcal{A}_R$表示在

$$\mathcal{S}_R := \{z\in\mathbb{C} : |\mathrm{Im}z| < R\},$$

上解析的1–周期函数f的全体，且定义其范数

$$\|f\|_R := \sup_{z\in\mathcal{S}_R} |f(z)|.$$

假设V是定义在$\mathcal{S}_R := \{z\in\mathbb{C} : |\mathrm{Im}z| < R\}$上的1–周期的亚纯函数，在实轴上取实值，且存在某个$C>0$使得

$$|V(z)-V(z-a)| \geq C|a|_1, \quad \forall a\in\mathbb{R}, \ \ z\in\mathcal{S}_R. \tag{C.1}$$

$V(x)=\tan\pi x$就可看做是一个典型的例子，其中C为介于0和π之间的任意值。这样的函数V具有如下的稳定性。

引理 C.1 任给$g\in\mathcal{A}_R$，满足$\|g\|_R < \varrho C$。如果$0<\varrho<R$，那么$\tilde{V} := V+g$就是$\mathcal{S}_{R-\varrho}$上的亚纯函数，且满足

$$|\tilde{V}(z)-\tilde{V}(z-a)| \geq \left(C-\frac{1}{\varrho}\|g\|_R\right)|a|_1, \quad \forall a\in\mathbb{R}, \ \ z\in\mathcal{S}_{R-\varrho}.$$

此外，$z\in\mathcal{S}_{R-\varrho}$是$\tilde{V}$的极点，当且仅当它是$V$的极点。

证明：由于$g\in\mathcal{A}_R$，那么应用Cauchy公式就可得

$$\left|\frac{dg}{dz}(z_*)\right| \leq \left|\oint_\gamma \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{g(z)}{(z-z_*)^2}dz\right|, \quad \forall z_*\in\mathcal{S}_{R-\varrho},$$

此处γ是$\mathcal{S}_R$中围绕点z_*的任意路径。因此

$$\left|\frac{dg}{dz}(z_*)\right| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi\,\mathrm{dist}(z,\gamma)^2}\|g\|_R.$$

根据$z_*\in\mathcal{S}_{R-\varrho}$这一事实，可选取$\gamma$为以$z_*$为中心以$\varrho$为半径的圆周。那么

$$\left\|\frac{dg}{dz}\right\|_{R-\varrho} \leq \frac{1}{\varrho}\|g\|_R.$$

从而当$\|g\|_R < \varrho C$时，由不等式

$$\frac{|g(z)-g(z-a)|}{|a|_1} \le \left\|\frac{dg}{dz}\right\|_{R-\varrho}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \ \ z \in \mathcal{S}_{R-\varrho},$$

可知

$$|\tilde{V}(z)-\tilde{V}(z-a)| \ge |V(z)-V(z-a)| - |g(z)-g(z-a)| \ge \left(C - \frac{1}{\varrho}\|g\|_R\right)|a|_1.$$

关于极点的不变性验证，就非常明显了。 □

我们试图采用标准型为

$$D(x) = \mathrm{diag}\{V(x+\langle n, \tilde{\alpha}\rangle)\}_{n\in\mathbb{Z}^d},$$

的KAM迭代去分析$\ell^2(\mathbb{Z}^d)$上的线性算子L，其中$x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$不为函数$V$的极点，且$\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^d$满足Diophantine条件(1.3)。这是由于通过(1.4)定义的L可看做是两个无穷维矩阵之和，即

$$L = D_0 + Z_0 = \mathrm{diag}\{\tan\pi(x+\langle n,\tilde{\alpha}\rangle)\}_{n\in\mathbb{Z}^d} + \epsilon\Delta.$$

考虑对称矩阵$Z = (Z_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^d}$，其中$Z_{mn} \in \mathcal{A}_R$在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上为实解析的，（关于$\tilde{\alpha}$）满足shift条件，即

$$Z_{m+k,n+k}(x) = Z_{mn}(x+\langle k,\tilde{\alpha}\rangle), \quad x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$ [1]

并且存在充分小的$\varepsilon > 0$使得

$$\|Z_{mn}\|_R \le \varepsilon e^{-\rho|m-n|}. \tag{C.2}$$

引理 C.2 *存在反对称矩阵$F = (F_{mn})_{m,n\in\mathbb{Z}^d}$，其中$F_{mn} \in \mathcal{A}_R$在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上实解析，且满足shift条件，使得*

$$[D,F] + Z = \mathrm{diag}\{Z_{nn}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}. \tag{C.3}$$

此外，

$$\|F_{mn}\|_R \le C^{-1}\gamma^{-1}|m-n|^{\tilde{\tau}} \cdot \|Z_{mn}\|_R.$$

[1]容易验证，这一性质关于矩阵乘法是封闭的。

证明：通过直接计算可得

$$[D,F]_{mn}=(V(x+\langle m,\tilde{\alpha}\rangle)-V(x+\langle n,\tilde{\alpha}\rangle)F_{mn}.$$

因此，定义矩阵F为

$$F_{mn}=\begin{cases}\dfrac{Z_{mn}}{V(x+\langle n,\tilde{\alpha}\rangle)-V(x+\langle m,\tilde{\alpha}\rangle)}, & m\neq n\\ 0, & m=n\end{cases},$$

那么等式(C.3)成立。矩阵F的反对称性以及shift条件显而易见。

由于V满足条件(C.1)且$\tilde{\omega}$满足Diophantine条件(1.3)，从而有

$$|V(x+\langle n,\tilde{\alpha}\rangle)-V(x+\langle m,\tilde{\alpha}\rangle)|\geq C|(m-n)\tilde{\alpha}|_1\geq C\tilde{\gamma}|m-n|^{-\tilde{\tau}}.$$

所以

$$\|F_{mn}\|_R\leq C^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}|m-n|^{\tilde{\tau}}\cdot\|Z_{mn}\|_R.$$

□

推论 C.1 存在正交矩阵U，$U_{mn}\in\mathcal{A}_R$在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上实解析，且满足*shift*条件，使得

$$U^*(D+Z)U=D+\mathrm{diag}\{Z_{nn}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}+Z_+,$$

其中Z_+是一个对称矩阵，$(Z_+)_{mn}\in\mathcal{A}_R$在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上实解析，且满足*shift*条件。此外，对任意$0<\rho_+<\rho$，当$\varepsilon$充分小时，

$$\|(U-I_{\mathbb{Z}^d})_{mn}\|_R\leq cC^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}(\rho-\rho_+)^{-(\tilde{\tau}+1)}\varepsilon e^{-\rho_+|m-n|},$$
$$\|(Z_+)_{mn}\|_R\leq\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{-\rho_+|m-n|}.$$

证明：令$U=e^F$。对$k\geq 1$，根据表达式

$$(F^k)_{mn}=\sum_{\substack{l_j\in\mathbb{Z}^d\\ j=1,\cdots,k-1}}F_{ml_1}F_{l_1l_2}\cdots F_{l_{k-1}n}$$

可知当ε充分小时，

$$\|(F^k)_{mn}\|_R\leq c(C^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}(\rho-\rho_+)^{-(\tilde{\tau}+1)}\varepsilon)^ke^{-\rho_+|m-n|}\leq\varepsilon^{\frac{2k}{3}}e^{-\rho_+|m-n|}.$$

将$e^{\pm F}$进行幂级数展开，可见

$$\|(e^{\pm F}-I_{\mathbb{Z}^d})_{mn}\|_R\leq\varepsilon^{\frac{1}{2}}e^{-\rho_+|m-n|}.$$

注意到

$$\begin{aligned}Z_+ &= e^{-F}(D+Z)e^F-D-\mathrm{diag}\{Z_{nn}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}\\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}[\cdots[D,\underbrace{F]\cdots,F}_{k}]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}[\cdots[Z,\underbrace{F]\cdots,F}_{k}],\end{aligned}$$

从而可得

$$\|(Z_+)_{mn}\|_R\leq\varepsilon^{\frac{3}{2}}e^{-\rho_+|m-n|}.$$

$\square$

令$V_+=V+Z_{00}$。根据引理C.1，对任意的$0<R_+<R$，V_+是$\mathcal{S}_{R_+}$上的亚纯函数，且满足

$$|V_+(z)-V_+(z-a)|\geq\left(C-\frac{\varepsilon}{R-R_+}\right)|a|_1,\quad\forall a\in\mathbb{R},\ \ z\in\mathcal{S}_{R_+}.$$

此外，$z\in\mathcal{S}_{R_+}$是V_+的极点，当且仅当它是V的极点。

回到对算子L的分析，令$V_0(z)=\tan\pi z,\ \varepsilon_0=e^4\epsilon,\ \rho_0=4$，并任取$R_0>0$以及$1<C_0<\pi$。对$\nu=1,2,\cdots$，定义序列：

$$\varepsilon_\nu=\varepsilon_0^{\left(\frac{3}{2}\right)^\nu},\quad\rho_\nu=\frac{\rho_0}{2}+\frac{\rho_0}{2^{\nu+1}},\quad R_\nu=\frac{R_0}{2}+\frac{R_0}{2^{\nu+1}},\quad C_\nu=C-\sum_{j=0}^{\nu}\frac{\varepsilon_j}{R_j-R_{j+1}}.$$

根据引理C.2以及推论C.1，可得如下迭代命题：

命题 C.1 *存在$\epsilon_0=\epsilon_0(\tilde{\alpha})$，使得对线性算子$L$，以下结论在$0<\epsilon<\epsilon_0$时成立。*

对$\nu=1,2,\cdots$，存在一列$\mathcal{S}_{R_\nu}$上的亚纯函数V_ν，并满足

$$|V_\nu(z)-V_\nu(z-a)|\geq C_\nu|a|_1,\quad\forall a\in\mathbb{R},\ \ z\in\mathcal{S}_{R_\nu},$$

以及一列正交矩阵U_ν，$(U_\nu)_{mn}\in\mathcal{A}_{R_\nu}$在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上实解析，且满足shift条件，以及

$$\|(U_\nu-I_{\mathbb{Z}})_{mn}\|_{R_\nu}\leq cC_{\nu-1}^{-1}\tilde{\gamma}^{-1}(\rho_{\nu-1}-\rho_\nu)^{-(\tilde{\tau}+1)}\varepsilon_{\nu-1}e^{-\rho_\nu|m-n|},$$

使得

$$U_\nu^* \cdots U_1^* L U_1 \cdots U_\nu = \mathrm{diag}\{V_\nu(x + \langle n, \tilde{\alpha} \rangle)\}_{n \in \mathbb{Z}^d} + Z_\nu, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

此处Z_ν是一个对称矩阵，$(Z_\nu)_{mn} \in \mathcal{A}_{R_\nu}$在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上实解析，且满足*shift*条件，以及

$$\|(Z_\nu)_{mn}\|_{R_\nu} \leq \varepsilon_\nu e^{-\rho_\nu |m-n|}.$$

由此可知，当$\nu \to \infty$时，$V_\nu \to \hat{V}$在$\mathcal{S}_{\frac{R}{2}}$上成立，并且在算子范数$\|\cdot\|_{\frac{R}{2}}$的意义下，

$$U_1 \cdots U_\nu \to U, \quad Z_\nu \to 0.$$

经直接计算，可知

$$\|(U - I_{\mathbb{Z}^d})_{mn}\|_{\frac{R}{2}} \leq c C^{-1} \tilde{\gamma}^{-1} \epsilon e^{-2|m-n|}.$$

附录四　定理1.6的证明概要

对于$\mathcal{I}\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上的光滑函数$f$，定义$|f|_{C^j}:=\max\limits_{0\le k\le j}\sup\limits_{x\in\mathcal{I}}\frac{1}{k!}|\partial_x^k f(x)|$。(1.6)中的算子$T$可以看做是两个无穷维矩阵之和，即

$$T=D_0+Z_0=\mathrm{diag}\{V(x+n\tilde{\alpha})\}_{n\in\mathbb{Z}}+\epsilon\Delta.$$

我们要去定义一种包括了$\mathrm{diag}\{V(x+n\tilde{\alpha})\}_{n\in\mathbb{Z}}$的标准型。

定义 D.1 给定一光滑依赖于$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的对称矩阵$D$，满足以下*shift*条件

$$D_{m+k,n+k}(x)=D_{mn}(x+k\tilde{\alpha}),\quad \forall k\in\mathbb{Z}, \tag{D.1}$$

其中$\tilde{\alpha}$是一*Diophantine*数，即存在$\tilde{\gamma}>0$，$\tilde{\tau}>1$，使得

$$|n\tilde{\alpha}|_1\ge\frac{\tilde{\gamma}}{|n|^{\tilde{\tau}}},\quad \forall n\ne 0.$$

如果下列条件满足，我们称D是一个**标准型**。

(a) 短程性.

$$|D_{mn}|_{C^k}\le\begin{cases} Ce^{-\rho|m-n|}L^k, & |m-n|\le N\\ 0, & |m-n|>N\end{cases},\quad \forall k\ge 0.$$

(b) 分块对角化. 任意取定$x_*\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。存在以$x_*$为中心的区间$\mathcal{I}$，一个对整数集互不相交的分解$\bigcup_j\Lambda_j=\mathbb{Z}$，以及一个在$\mathcal{I}$上光滑的正交矩阵$Q$使得

- (b1) 对每个j，$\sharp\Lambda_j\le M$且$\mathrm{diam}\Lambda_j\le MN$;
- (b2) $\tilde{D}=Q^*DQ=\prod_j\tilde{D}_{\Lambda_j}(x)$，$\forall x\in\mathcal{I}$;
- (b3) 若$|m-n|>N$，则$Q_{mn}\equiv 0$。此外，对每个m，$Q_{mn}\ne 0$仅对至多M个不同的n成立;
- (b4) $|Q|_{C^k}\le L^k$，$\forall k\ge 0$。

(c) 特征值. 存在分段光滑函数$E(x)$, 使得对每个j, $\{E(x_*+n\tilde{\alpha})\}_{n\in\Lambda_j}$是$\tilde{D}_{\Lambda_j}(x_*)$的特征值，且存在集合$\Omega_j\supset\Lambda_j$使得

(c1) 对每个n，若$\inf_{l\in\Lambda_j}|E(x_*+l\tilde{\alpha})-E(x_*+n\tilde{\alpha})|<\kappa$，则存在$m\in\Omega_j$使得

$$x_*+n\tilde{\alpha}\in x_*+m\tilde{\alpha}+\frac{1}{2}(\mathcal{I}-x_*),$$

$$Q(x)(\mathbb{R}^{\Lambda(n)})\subset\mathbb{R}^{\Omega_j+n-m},\quad\forall x\in\mathcal{I};$$

(c2) 结式[1]

$$u_{\Omega_j}(\varphi,x)=\operatorname{Res}\left(\det(D(x+\varphi)_{\Omega_j}-tI_{\Omega_j}),\det(D(x)_{\Omega_j}-tI_{\Omega_j})\right)$$

满足

$$|u_{\Omega_j}|_{C^k}<(4MC)^{2M^2}B^k,\quad\forall k\leq\tilde{s}M^2+1,^{2}$$

$$\max_{0\leq k\leq\tilde{s}M^2}\left|\frac{1}{\nu!B^k}\partial_\varphi^k u_{\Omega_j}(\varphi,x)\right|\geq\vartheta,\quad\forall\varphi,\,\forall x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z};$$

(c3) $\sharp\Omega_j\leq M$且$\operatorname{diam}\Omega_j\leq\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\tilde{\tau}+2}$;

(c4) 区间$\{n\tilde{\alpha}+\mathcal{I}\}_{\operatorname{dist}(n,\Omega_j)<N}$互不相交;

(c5) 对每一$\varphi\in\mathcal{I}$，$u_{\Omega_j}(\varphi,x)$满足

$$|u_{\Omega_j}|_{C^k}<(2MC)^{2M^2}B^k,\quad\forall k\leq\tilde{s}M^2+1,^{3}$$

$$\max_{0\leq k\leq\tilde{s}M^2}\left|\frac{1}{\nu!B^k}\partial_x^k u_{\Omega_j}(\varphi,x)\right|\geq\vartheta\left(\prod_{m,n\in\Omega_j}|\varphi+(m-n)\tilde{\alpha}|_1\right),\quad\forall x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

注释 D.1 条件(a)蕴含了对于$D:\ell^2(\mathbb{Z})\to\ell^2(\mathbb{Z})$的算子范数的估计:

$$\|D\|_{C^k}\leq C\frac{e^\rho+1}{e^\rho-1}L^k\leq C\frac{4}{\rho}L^k,\quad\forall k\geq 0.$$

考虑对称矩阵光滑依赖于$x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的矩阵$Z(x)$，满足shift条件，且

$$|Z_{mn}|_{C^k}<\varepsilon e^{-\varrho|m-n|}L^k,\quad\forall k\geq 0.\tag{D.2}$$

[1]两个首一多项式P与Q的结式定义为$\operatorname{Res}(P,Q)=\prod_{\substack{P(x)=0\\Q(y)=0}}(x-y)$。

[2]范数中的求导是关于变量φ。

[3]范数中的求导是关于变量x。

引理 D.1 ([16]中的引理7) 令D为区间$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$上包含参数$C,\ L,\ \rho,\ M,\ N,\ \kappa,\ B,\ \vartheta,\ \lambda$的标准型，且令$a < g < h$满足限制条件

$$\frac{1}{\tilde{\tau} M^{3\tilde{s}M^3}} \leq a < \frac{g}{20\tilde{s}\tilde{\tau}M^4} < \frac{h}{100\tilde{s}^2\tilde{\tau}M^8}, \quad h \leq \frac{1}{5\tilde{s}M^{2\tilde{s}M^3}}.$$

假设

$$1 \leq B \leq L, \quad M \geq 8, \quad 1 < C < 2, \quad \rho, \kappa, \vartheta \leq 1.$$

令Z为一个满足*shift*条件的对称矩阵。假设

$$\lambda \leq |\mathcal{I}| \leq \vartheta/B,$$

$$|Z_{mn}|_{C^k} < \varepsilon e^{-\rho|m-n|} L^k, \quad k \geq 0.$$

如果存在随M超指数衰减的常数$\Gamma = \Gamma(\tilde{\gamma}, \tilde{\tau}, \tilde{s}, M)$，使得

$$|\varepsilon| < \Gamma \left[\frac{\rho^{\tilde{\tau}} \kappa \vartheta \lambda^{\tilde{\tau}^2}}{L N^{\tilde{\tau}}} e^{-N\rho} \right]^{e^{e^{\tilde{s}M^4}}}, \tag{D.3}$$

则存在光滑的正交矩阵$\tilde{U}$，满足*shift*条件，使得

$$|(\tilde{U} - I)_{mn}|_{C^k} < \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\rho'|m-n|} L'^k$$

以及

$$\tilde{U}^*(D+Z)\tilde{U} = D' + Z',$$

其中D'是区间$\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$上的标准型，带有参数

$$\begin{aligned} &C' = (1+\varepsilon^{\frac{1}{2}})C, && L' = \varepsilon^{-h} L, && \rho' = \tfrac{1}{2}\rho, \\ &\lambda' = 9^{-M'}\lambda, && M' = M^{\tilde{s}M^3}, && N' = \varepsilon^{-a}, \\ &\kappa' = \varepsilon^h, && B' = L, && \vartheta' = \varepsilon^g L, \end{aligned}$$

且

$$2\lambda' \leq |\mathcal{I}'| \leq \varepsilon^g,$$

$$|Z'_{mn}|_{C^k} < \varepsilon^{\frac{1}{2}\varepsilon^{-a/2}} e^{-\rho'|m-n|} L'^k.$$

另外，

$$|E(x_* + m\tilde{\alpha}) - E(x_* + n\tilde{\alpha})| < M' \frac{L}{\rho} \varepsilon^g, \quad \forall m \in \Lambda'(n),$$

$$Q'(x)(\mathbb{R}^{\Lambda'(n)}) \subset \sum_{m\in\Lambda'(n)} Q(x)(\mathbb{R}^{\Lambda(m)}), \quad \forall x \in \mathcal{I}',$$

且D'在区间$x_* + \frac{1}{2}(\mathcal{I}' - x_*)$上是带有相同参数的标准型。

最后，如果$M \geq 2\tilde{\tau}$，那么集合

$$\{x_* + m\tilde{\alpha} : |E(x_* + m\tilde{\alpha}) - E(x_* + (m+n)\tilde{\alpha})| < 2M'\frac{L}{\rho}\varepsilon^g\}, \ \ \forall\, 4(1/\lambda)^{\tilde{\tau}+2} < |n| < M'N',$$

$$\{x_* + m\tilde{\alpha} : |E(x_* + m\tilde{\alpha}) - E(x_* + (m+n)\tilde{\alpha})| < 2\varepsilon^{\frac{1}{8}}\}, \ \ \forall\, M'N' < |n| < 4(1/\lambda')^{\tilde{\tau}+2}$$

的闭包，分别是最多有$\varepsilon^{-\frac{g}{5\tilde{s}M^2}}$和$\varepsilon^{-M^4 g}$个长度为$\varepsilon^{\frac{g}{4\tilde{s}M^2}}$和$\varepsilon^{2M^4 g}$分支的并集。

该引理的证明包含了新的分块Λ_i'，即在$\mathbb{Z}$上新的等价关系，以及新的正交矩阵Q'。证明过程详见文献[16]的第5部分。

对于$Z_0 = \epsilon\Delta$，我们有

$$|(Z_0)_{mn}|_{C^k} < \varepsilon_0 e^{-\rho_0|m-n|} L_0^k,$$

其中$\varepsilon_0 = e\epsilon$, $\rho_0 = 1$且$L_0 = L$（见(1.7)）。在[16]的第6部分中，Eliasson已证明，$D_0 = \mathrm{diag}\{V(x+n\tilde{\alpha})\}_{n\in\mathbb{Z}}$是一个标准型，其中$C_0 = C$（见(1.7)），$N_0 \geq 1$，

$$M_0 \geq \max\left\{2^{\tilde{s}+4} C \frac{L^{\tilde{s}+1}((\tilde{s}+1)!)^2}{\tilde{\xi}},\, 2\tilde{\tau},\, 8\right\},$$

且有其他合适的参数$\kappa_0, B_0, \lambda_0, \vartheta_0$。

对$\nu = 0, 1, 2, \cdots$，令$M_{\nu+1} = M_\nu^{\tilde{s}M_\nu^3}$，以及

$$a_\nu = \frac{1}{\tilde{\tau}}\left(\frac{1}{M_\nu}\right)^{3\tilde{s}M_\nu^3}, \quad g_\nu = 20\tilde{s}\tilde{\tau}M_\nu^4 a_\nu, \quad h_\nu = \frac{1}{5\tilde{s}}\left(\frac{1}{M_\nu}\right)^{2\tilde{s}M_\nu^3}.$$

其他序列定义如下：

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\nu+1} = \varepsilon_\nu^{\frac{1}{2}\varepsilon_\nu^{-a_\nu/2}}, && C_{\nu+1} = (1+\varepsilon_\nu^{1/2})C_\nu, && L_{\nu+1} = \varepsilon_\nu^{-h_\nu} L_\nu,\\
&N_{\nu+1} = \varepsilon_\nu^{-a_\nu}, && \rho_{\nu+1} = \varepsilon_\nu^{a_\nu}, && \kappa_{\nu+1} = \varepsilon_\nu^{h_\nu},\\
&B_{\nu+1} = L_\nu, && \lambda_{\nu+1} = 9^{-M_\nu}\varepsilon_\nu^{g_\nu}, && \vartheta_{\nu+1} = \varepsilon_\nu^{g_\nu} L_\nu.
\end{aligned}$$

根据序列$\{\varepsilon_\nu\}$的定义，不等式(D.3)在[16]的第6部分中得到证明。因此，引理D.1可以循环应用。对每个$\nu \geq 0$，都存在满足shift条件的正交矩阵$\tilde{U}_\nu$使得

$$|(\tilde{U}_\nu - I_{\mathbb{Z}})_{mn}|_{C^k} < \varepsilon_\nu^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho_\nu}{2}|m-n|} L_{\nu+1}^k$$

且
$$(\tilde{U}_0\cdots\tilde{U}_\nu)^*(D_0+Z_0)(\tilde{U}_0\cdots\tilde{U}_\nu)=D_{\nu+1}+Z_{\nu+1},$$
其中$D_{\nu+1}$为带有参数$C_{\nu+1}$, $L_{\nu+1}$, $\rho_{\nu+1}$, $M_{\nu+1}$, $N_{\nu+1}$, $\kappa_{\nu+1}$, $B_{\nu+1}$, $\vartheta_{\nu+1}$, $\lambda_{\nu+1}$的标准型，且
$$|(Z_{\nu+1})_{mn}|_{C^k}\le\varepsilon_{\nu+1}e^{-\rho_{\nu+1}|m-n|}L_{\nu+1}^k.$$
从而，在算子范数$\|\cdot\|_{C^k}$意义下，
$$\tilde{U}_0\cdots\tilde{U}_\nu\to U,\quad Z_\nu\to 0,\quad D_\nu\to D_\infty.$$
令$U_{\nu+1}=\tilde{U}_0\cdots\tilde{U}_\nu$，经直接计算，
$$|(U_{\nu+1}-I_{\mathbb{Z}})_{mn}|_{C^k}<\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\rho_\nu}{2}|m-n|}L_{\nu+1}^k.$$

明显地，存在一致极限$E^\infty(x)$使得，$E^\nu(x)\to E^\infty(x)$。$D_\infty(x)$的谱集即为E^∞像的闭包。现考虑满足
$$|E_\infty(x)-E_\infty(x+n\tilde{\alpha})|<\frac{3}{2}M_{\nu+1}\frac{L_\nu}{\rho_\nu}\varepsilon_\nu^{g_\nu},\quad \exists\, n\ \text{ s.t. }\ 4(1/\lambda_\nu)^{\tilde{\tau}+2}<|n|<M_{\nu+1}N_{\nu+1}$$
或者
$$|E_\infty(x)-E_\infty(x+n\tilde{\alpha})|<\frac{3}{2}\varepsilon_\nu^{\frac{1}{8}},\quad \exists\, n\ \text{ s.t. }\ M_{\nu+1}N_{\nu+1}<|n|<4(1/\lambda_{\nu+1})^{\tilde{\tau}+2}$$
的所有x的闭包S_ν。根据引理D.1中最后的陈述，这是一个测度小于$c\varepsilon_\nu^{g_\nu/20\tilde{s}M_\nu^2}$的集合。根据Borel-Cantelli引理，我们可知，存在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的全测子集$\tilde{\mathcal{X}}$使得对任意$x\in\tilde{\mathcal{X}}$，每个$x+n\tilde{\alpha}$只存在于有限个S_ν之中。选取这一类型的$x=x_*$，即对所有$n\in\mathbb{Z}$，存在$\nu_0(n)$使得对于$\nu\ge\nu_0(n)$都有$x_*+n\tilde{\alpha}\notin S_\nu$。因此，对这样的$\nu$，
$$|E^\nu(x_*+n\tilde{\alpha})-E^\nu(x_*+n\tilde{\alpha}+m\tilde{\alpha})|\ge 2M_{\nu+1}\frac{L_\nu}{\rho_\nu}\varepsilon_\nu^{g_\nu},\quad \forall\, 4(1/\lambda_\nu)^{\tilde{\tau}+2}<|m|<M_{\nu+1}N_{\nu+1},$$
$$|E^\nu(x_*+n\tilde{\alpha})-E^\nu(x_*+n\tilde{\alpha}+m\tilde{\alpha})|\ge 2\varepsilon_\nu^{\frac{1}{8}},\quad \forall\, M_{\nu+1}N_{\nu+1}<|m|<4(1/\lambda_{\nu+1})^{\tilde{\tau}+2}.$$
这表示对于$\nu\ge\nu_0(n)$, $\Lambda^\nu(n)\subset[n-4(1/\lambda_{\nu_0(n)})^{\tilde{\tau}+2},\ n+4(1/\lambda_{\nu_0(n)})^{\tilde{\tau}+2}]$。所以块$\Lambda^\nu(n)$就不再扩大了，即
$$\Lambda^{\nu+1}(n)=\Lambda^\nu(n),\quad \forall\nu\ge\nu_0(n).$$

附录五　引理2.1的证明

对于$|i|,|j|,|m|,|n|\le\kappa|\ln\epsilon|$，我们在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上考虑函数

$$V^0_{i,j,m,n}(x):=\tan\pi(x+i\tilde\alpha)-\tan\pi(x+j\tilde\alpha)+\tan\pi(x+m\tilde\alpha)-\tan\pi(x+n\tilde\alpha).$$

由于$\sup_{x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}}|\hat V(x)-\tan\pi x|\le\epsilon$，因此，为得到(2.24)中的下界，只需证明在$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的某个子集上有

$$|V^0_{i,j,m,n}(x)|\ge 2\epsilon^{\frac{1}{4}}.$$

我们有必要将这些函数都限制在子集$\mathcal{X}_0=\mathcal{X}_0'\cap\mathcal{X}_0''\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}$上（必要性稍后可见），其中

$$\mathcal{X}_0':=\left\{x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}:\left|x+n\tilde\alpha-\frac{1}{2}\right|\ge\epsilon^{\frac{1}{1200}},\quad\forall|n|\le\kappa|\ln\epsilon|\right\},$$
$$\mathcal{X}_0'':=\left\{x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}:|\tan\pi(x+n\tilde\alpha)|\ge\epsilon^{\frac{1}{1200}},\quad\forall|n|\le\kappa|\ln\epsilon|\right\}.$$

因此在$\mathcal{X}_0$上，对充分小的ϵ，以及$|n|\le\kappa|\ln\epsilon|$，

$$\epsilon^{\frac{1}{1200}}\le|\tan\pi(x+n\tilde\alpha)|\le\left|\tan\pi\left(\frac{1}{2}-\epsilon^{\frac{1}{1200}}\right)\right|=\left|\tan\epsilon^{\frac{1}{1200}}\pi\right|^{-1}\le c\epsilon^{-\frac{1}{1200}}.\tag{E.1}$$

那么$V^0_{i,j,m,n}(x)$就都是$\mathcal{X}_0$上有界的分段光滑函数。容易验证，$\mathcal{X}_0$至多有$c\kappa|\ln\epsilon|$个连通分支，且对充分小的ϵ满足

$$\mathrm{mes}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\setminus(\mathcal{X}_0'\cap\mathcal{X}_0''))\le c\kappa|\ln\epsilon|\cdot\epsilon^{\frac{1}{1200}}<\epsilon^{\frac{1}{1400}}.$$

很明显，当$\{i,m\}=\{j,n\}$时，$V^0_{i,j,m,n}\equiv0$。所以我们假设$\{i,m\}\ne\{j,n\}$。如果还有$\{i,m\}\cap\{j,n\}\ne\emptyset$，那么该交集仅有一个元素。不失一般性，假设$i=j$，$m\ne n$，则

$$V^0_{i,j,m,n}(x)=\tan\pi(x+m\tilde\alpha)-\tan\pi(x+n\tilde\alpha).\tag{E.2}$$

因此，

$$|V^0_{i,j,m,n}(x)|\ge\pi|(m-n)\tilde\alpha|_1\ge\frac{\pi\tilde\gamma}{2^{\tilde\tau}|\ln\epsilon|^{\tilde\tau}}\ge\epsilon^{\frac{1}{1200}}.\tag{E.3}$$

而$\{i,m\}\cap\{j,n\}=\emptyset$的情形就显得更为复杂，它可分为以下四种子情形：

(S1) $\{i,m\}\cap\{j,n\}=\emptyset$，$i\ne m$且$j\ne n$；

(S2) $\{i,m\}\cap\{j,n\}=\emptyset$，$i=m$且$j\ne n$；

(S3) $\{i,m\}\cap\{j,n\}=\emptyset$，$i\neq m$且$j=n$；
(S4) $\{i,m\}\cap\{j,n\}=\emptyset$，$i=m$且$j=n$。
我们只需考虑(**S1**) – (**S3**)，这是由于在**(S4)**中，

$$V^0_{i,j,m,n}(x)=2(\tan\pi(x+m\tilde{\alpha})-\tan\pi(x+n\tilde{\alpha}))$$

与(E.2)中的情形类似。相应于(**S1**) – (**S3**)，令

$$B_1(x):=\begin{pmatrix}\tan\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^2\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^3\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^4\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^4\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan^4\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan^4\pi(x+n\tilde{\alpha})\end{pmatrix},$$

以及

$$B_2(x):=\begin{pmatrix}\tan\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^2\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^3\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+n\tilde{\alpha})\end{pmatrix},$$

$$B_3(x):=\begin{pmatrix}\tan\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^2\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^3\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+n\tilde{\alpha})\end{pmatrix}.$$

引理 E.1 给定$|i|,|j|,|m|,|n|\leq\kappa|\ln\epsilon|$。若$\epsilon$充分小，则对任意$x\in\mathcal{X}_0$，有

- 当**(S1)**成立时，$|\det(B_1(x))|\geq\epsilon^{\frac{1}{120}}$；
- 当**(S2)**成立时，$|\det(B_2(x))|\geq\epsilon^{\frac{1}{200}}$；
- 当**(S3)**成立时，$|\det(B_3(x))|\geq\epsilon^{\frac{1}{200}}$。

证明：$B_1(x)$的行列式可表达为

$$\tan\pi(x+i\tilde{\alpha})\cdot\tan\pi(x+j\tilde{\alpha})\cdot\tan\pi(x+m\tilde{\alpha})\cdot\tan\pi(x+n\tilde{\alpha})\cdot\det(\tilde{B}_1(x)),$$

其中$\tilde{B}_1(x)$为Vandermonde矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ \tan\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^2\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan^2\pi(x+n\tilde{\alpha})\\ \tan^3\pi(x+i\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+j\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+m\tilde{\alpha}) & \tan^3\pi(x+n\tilde{\alpha})\end{pmatrix}.$$

所以，当**(S1)**成立时，由(E.1)与(E.3)，以及公式

$$\det \tilde{B}_1(x) = \prod_{\substack{n_1,n_2\in\{i,j,m,n\} \\ n_1<n_2}} \left(\tan\pi(x+n_1\tilde{\alpha}) - \tan\pi(x+n_2\tilde{\alpha})\right),$$

可得$|\det(B_1(x))| \geq \epsilon^{\frac{1}{120}}$。

至于**(S2)**与**(S3)**，毫无疑问，$|\det(B_2(x))|, |\det(B_3(x))| \geq \epsilon^{\frac{1}{200}}$。这是因为我们可以进行类似于以上的证明。 □

对$s\in\{0,1,2,3\}$，定义

$$\tilde{u}^{(s)}(x) = \left(V^{(s)}(x+i\tilde{\alpha}),\ V^{(s)}(x+j\tilde{\alpha}),\ V^{(s)}(x+m\tilde{\alpha}),\ V^{(s)}(x+n\tilde{\alpha})\right)^{\top} \in \mathbb{R}^4,$$

其中$V(x) := \tan\pi x$，$V^{(s)}$为其第s阶导数，且$V^{(0)}$表示函数V本身。经计算可得

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x) &= \pi + \pi\tan^2\pi x, \\ V^{(2)}(x) &= 2\pi^2\tan\pi x + 2\pi^2\tan^3\pi x, \\ V^{(3)}(x) &= 2\pi^3 + 8\pi^3\tan^2\pi x + 6\pi^3\tan^4\pi x. \end{aligned}$$

此外，若ϵ充分小，那么对于$x\in\mathcal{X}_0$，有

$$|V^{(0)}(x)| \leq c\epsilon^{-\frac{1}{1200}}, \quad \left|V^{(1)}(x)\right| \leq c\epsilon^{-\frac{1}{600}}, \quad \left|V^{(2)}(x)\right| \leq c\epsilon^{-\frac{1}{400}}, \quad \left|V^{(3)}(x)\right| \leq c\epsilon^{-\frac{1}{300}}.$$

实际上，可以验证对$s=0,1,2,\cdots$，有

$$\left|V^{(s)}(x)\right| \leq c\epsilon^{-\frac{s+1}{1200}}, \tag{E.4}$$

此处$c=c(s)$随s指数增长。令

$$\begin{aligned} &u^{(0)}(x) = \tilde{u}^{(0)}(x), \quad u^{(1)}(x) = \tilde{u}^{(1)}(x) - \pi(1,1,1,1)^{\top}, \\ &u^{(2)}(x) = \tilde{u}^{(2)}(x), \quad u^{(3)}(x) = \tilde{u}^{(3)}(x) - 2\pi^3(1,1,1,1)^{\top}. \end{aligned}$$

因此，4×4矩阵$(u^{(0)}(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), u^{(3)}(x))$的行列式等于$c\cdot\det(B_1(x))$，其中$B_1(x)$如引理E.1中所定义。

我们需对函数$V^0_{i,j,m,n}$得到一些横截性条件。由以下引理，它们将在推论E.1中产生。

引理 E.2 （[6]Appendix B中的命题）令$u^{(0)}$，$\cdots$，$u^{(L-1)}$为$\mathbb{R}^L$中的L个线性无关的向量，且满足$\|u^{(s)}\|_{\ell^1} \le 1$，$s = 0, 1, \cdots, L-1$。任给$v \in \mathbb{R}^L$，则存在$s \in \{0, \cdots, L-1\}$，使得

$$|\langle v, u^{(s)}\rangle| \ge L^{-\frac{3}{2}} \|v\|_{\ell^1} \det U,$$

其中$\det U$为向量$u^{(s)}$所组成矩阵的行列式，且$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示内积。

证明过程详见[6]。

推论 E.1 给定$|i|, |j|, |m|, |n| \le \kappa |\ln \epsilon|$，且$\{i, m\} \cap \{j, n\} = \emptyset$。若$\epsilon$充分小，则对任意$x \in \mathcal{X}_0$，有

- 当**(S1)**成立时，存在$s \in \{0, 1, 2, 3\}$使得

$$\left| V^{0(s)}_{i,j,m,n}(x) \right| \ge c\epsilon^{\frac{1}{60}}; \tag{E.5}$$

- 当**(S2)**或**(S3)**成立时，存在$s \in \{0, 1, 2\}$使得

$$\left| V^{0(s)}_{i,j,m,n}(x) \right| \ge c\epsilon^{\frac{1}{100}}. \tag{E.6}$$

证明： 考虑向量

$$\bar{u}^{(s)}(x) = \begin{cases} \frac{u^{(s)}(x)}{\|u^{(s)}(x)\|_{\ell^1}}, & \|u^{(s)}(x)\|_{\ell^1} > 1, \\ u^{(s)}(x), & \|u^{(s)}(x)\|_{\ell^1} \le 1, \end{cases}, \quad s = 0, 1, 2, 3.$$

根据(E.4)，对$x \in \mathcal{X}_0$，

$$|\det(U(x))| > c \left(\prod_{s=0}^{3} \frac{1}{\max\{\|u^{(s)}(x)\|_{\ell^1}, 1\}} \right) |\det(B_1(x))| > c(\epsilon^{\frac{1}{1200}})^{10} \cdot \epsilon^{\frac{1}{120}} > c\epsilon^{\frac{1}{60}}.$$

以$v = (1, -1, 1, -1)$应用引理E.2，可得存在$s \in \{0, 1, 2, 3\}$使得

$$\left| V^{0(s)}_{i,j,m,n}(x) \right| = |\langle v, \tilde{u}^{(s)}(x)\rangle| = |\langle v, u^{(s)}(x)\rangle| \ge |\langle v, \bar{u}^{(s)}(x)\rangle| \ge c \cdot 4^{-\frac{3}{2}} \epsilon^{\frac{1}{60}} \|v\|_{\ell^1} = c\epsilon^{\frac{1}{60}}.$$

至于**(S2)**和**(S3)**，我们分别以$v = (2, -1, -1)$和$v = (1, 1, -2)$，并结合引理E.1中的相应结论，应用引理E.2来进行类似处理。 □

方便起见，从现在起，我们令(E.5)和(E.6)中的常数$c=1$。引理2.1的证明过程，将在以下引理中完成。

引理 E.3 对充分小的ϵ，存在$\mathcal{X}_0$的子集$\mathcal{X}_\epsilon$，满足

$$\mathrm{mes}(\mathcal{X}_0 \setminus \mathcal{X}_\epsilon) < \epsilon^{\frac{1}{50}},$$

使得对任意$|i|,|j|,|m|,|n| \leq \kappa|\ln\epsilon|$且$\{i,m\} \neq \{j,n\}$，有

$$|V^0_{i,j,m,n}(x)| \geq 2\epsilon^{\frac{1}{4}}, \quad x \in \mathcal{X}_\epsilon. \tag{E.7}$$

证明：固定$|i|,|j|,|m|,|n| \leq \kappa|\ln\epsilon|$且$\{i,m\} \neq \{j,n\}$。我们将证明

$$\mathrm{mes}(\{x \in \mathcal{X}_0 : |V^0_{i,j,m,n}(x)| < 2\epsilon^{\frac{1}{4}}\}) < \epsilon^{\frac{1}{45}}.$$

我们仅处理情形(**S1**)，其他的情形可类似进行。由推论E.1，对每个$x \in \mathcal{X}_0$，有

$$\max_{0\leq s\leq 3} \left|V^{0(s)}_{i,j,m,n}(x)\right| \geq \epsilon^{\frac{1}{60}}.$$

令$A := \max\limits_{0\leq s\leq 4} \sup\limits_{x\in\mathcal{X}_0} \left|V^{0(s)}_{i,j,m,n}(x)\right|$。根据(E.4)，$A \leq c\epsilon^{-\frac{1}{240}}$。

我们首先在$\mathcal{X}_0$的一个连通分支(a,b)上考虑函数$V^0_{i,j,m,n}$。将(a,b)分割为大约$2\epsilon^{-\frac{1}{24}}$个区间，则其中每个区间长度不超过$\frac{1}{2}\epsilon^{\frac{1}{24}}$。选取其中一个区间，记为$I$。那么，若对所有$x \in I$有$|V^0_{i,j,m,n}(x)| \geq 2\epsilon^{\frac{1}{4}}$，我们便无需对$I$进行任何处理。否则，存在某个$x_0 \in I$，使得$|V^0_{i,j,m,n}(x_0)| < 2\epsilon^{\frac{1}{4}}$。这种情况下，由推论E.1，存在$1 \leq s \leq 3$，使得$\left|V^{0(s)}_{i,j,m,n}(x_0)\right| \geq \epsilon^{\frac{1}{60}}$。我们考虑最复杂的情形，即$s=3$，则$\left|V^{0(3)}_{i,j,m,n}(x_0)\right| \geq \epsilon^{\frac{1}{60}}$。因为对于$x \in I$，

$$\left|V^{0(3)}_{i,j,m,n}(x) - V^{0(3)}_{i,j,m,n}(x_0)\right| \leq \sup_{y\in I}\left|V^{0(4)}_{i,j,m,n}(y)\right| \cdot |x-x_0| \leq A|I| < \frac{1}{2}\epsilon^{\frac{1}{60}},$$

故可得$\left|V^{0(3)}_{i,j,m,n}(x)\right| \geq \frac{1}{2}\epsilon^{\frac{1}{60}}$。

接着，我们在I上分析$V^{0(2)}_{i,j,m,n}$。若存在某个$x_1 \in I$使得$\left|V^{0(2)}_{i,j,m,n}(x_1)\right| < \epsilon^{\frac{1}{12}}$，则对于满足$|x-x_1| > 4\epsilon^{\frac{1}{15}}$的$x$，存在某个$y \in I$使得

$$\left|V^{0(2)}_{i,j,m,n}(x) - V^{0(2)}_{i,j,m,n}(x_1)\right| = \left|V^{0(3)}_{i,j,m,n}(y)\right| \cdot |x-x_1| \geq \frac{1}{2}\epsilon^{\frac{1}{60}} \cdot 4\epsilon^{\frac{1}{15}} = 2\epsilon^{\frac{1}{12}}.$$

因此，存在包含x_1的区间$I_1 \subset I$，且满足$|I_1| \leq 4\epsilon^{\frac{1}{15}}$，使得如果$x \in I \setminus I_1$，那么$\left|V^{0(2)}_{i,j,m,n}(x)\right| \geq \epsilon^{\frac{1}{12}}$。

$I \setminus I_1$至多有两个连通分支，记为J_1和J_2。我们在其上考虑$V^{0(1)}_{i,j,m,n}$。若存在$x_2 \in J_1$使得$\left|dV^0_{i,j,m,n}(x_2)\right| < \epsilon^{\frac{1}{6}}$，则对$|x - x_2| > 2\epsilon^{\frac{1}{12}}$，存在某个$y \in J_1$使得

$$\left|V^{0(1)}_{i,j,m,n}(x) - V^{0(1)}_{i,j,m,n}(x_2)\right| = \left|V^{0(2)}_{i,j,m,n}(y)\right| \cdot |x - x_2| \geq \epsilon^{\frac{1}{12}} \cdot 2\epsilon^{\frac{1}{12}} = 2\epsilon^{\frac{1}{6}}.$$

因此，我们得到区间$I_2 \subset J_1 \subset I \setminus I_1$满足$|I_2| \leq 2\epsilon^{\frac{1}{12}}$，使得如果$x \in J_1 \setminus I_2$，那么$\left|V^{0(1)}_{i,j,m,n}(x)\right| \geq \epsilon^{\frac{1}{6}}$. 对$J_2$做同样的处理，我们得到区间$I_3 \subset J_2 \subset I \setminus I_1$，满足$|I_3| \leq 2\epsilon^{\frac{1}{12}}$，使得如果$x \in I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$，那么$\left|V^{0(1)}_{i,j,m,n}(x)\right| \geq \epsilon^{\frac{1}{6}}$。

很明显，$I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$中至多有四个连通分支，记作$J_1', J_2', J_3'$和$J_4'$。若存在$x_1' \in J_1'$使得$|V^0_{i,j,m,n}(x_1')| < 2\epsilon^{\frac{1}{4}}$，则对$|x - x_1'| > 4\epsilon^{\frac{1}{12}}$ 存在某个$y \in J_1'$ 使得

$$|V^0_{i,j,m,n}(x) - V_{i,j,m,n}(x_1')| = \left|V^{0(1)}_{i,j,m,n}(y)\right| \cdot |x - x_1'| \geq \epsilon^{\frac{1}{6}} \cdot 4\epsilon^{\frac{1}{12}} = 4\epsilon^{\frac{1}{4}}.$$

因此，我们得到包含x_1'的区间$I_1' \subset J_1' \subset I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$满足$|I_1'| \leq 4\epsilon^{\frac{1}{12}}$，使得如果$x \in J_1' \setminus I_1'$，则$|V^0_{i,j,m,n}(x)| \geq 2\epsilon^{\frac{1}{4}}$。对$J_2', J_3'$和$J_4'$做同样的处理，我们得到区间$I_2', I_3'$和$I_4'$，满足$I_k' \subset J_k' \subset I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$且$|I_k'| \leq 4\epsilon^{\frac{1}{12}}$, $k = 2, 3, 4$，使得若$x \in \bigcup_{k=1}^4 (J_k' \setminus I_k')$，则

$$|V^0_{i,j,m,n}(x)| \geq 2\epsilon^{\frac{1}{4}}.$$

由于ϵ是充分小的，因此去掉一个测度小于$5\epsilon^{\frac{1}{15}}$的集合之后，(E.7)在I上成立。在$\mathcal{X}_0$上，有大约$c\kappa|\ln\epsilon| \cdot \epsilon^{-\frac{1}{24}}$个像$I$这样的区间，所以我们需去掉子集的测度小于$c\kappa|\ln\epsilon| \cdot \epsilon^{-\frac{1}{24}} \cdot \epsilon^{\frac{1}{15}} < \epsilon^{\frac{1}{45}}$。

因为我们所研究的函数下标满足$|i|, |j|, |m|, |n| \leq \kappa|\ln\epsilon|$，所以我们在$\mathcal{X}_0$上去掉的总测度不超过$c\kappa^4|\ln\epsilon|^4 \cdot \epsilon^{\frac{1}{45}} < \epsilon^{\frac{1}{50}}$. □

附录六　研究成果与发表论文

1、Zhiyan Zhao, Jiansheng Geng: Linearly stable quasi-periodic breathers in a class of random Hamiltonian systems. J. Dyn. Diff. Eqs, **23**, 961–997(2011).

2、Shiwen Zhang, Zhiyan Zhao: Diffusion bound and reducibility for discrete Schrödinger equations with tangent potential. Front. Math. China, **7(6)**, 1213–1235(2012).

3、Jiansheng Geng, Zhiyan Zhao: Quasi-periodic solutions for one-dimensional discrete nonlinear Schrödinger equations with tangent potential. Preprint.

4、Jiansheng Geng, Jiangong You, Zhiyan Zhao: Localization in one-dimensional quasi-periodic nonlinear systems. Preprint.

参考文献

[1] Aizenman, M., Frierich, R., Hundertmark, D., Shankar, S.: Constructive fractional-moment criteria for localization in random operators. Physica A. **279**, 369–377(2000).

[2] Aizenman, M., Molchanov, S.: Localization at large disorder and at extreme energies: An elementary derivations. Commun. Math. Phys. **157**, 245–278(1993).

[3] Anderson, P.: Absence of diffusion in certain random lattices. Phys. Rev. **109**, 1492(1958).

[4] Aubry, S., André, G.: Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. Ann. Israel. Phys. Soc. **3**, 33(1980).

[5] Bellissard, J., Lima, R., Scoppola, E.: Localization in ν-dimensional incommensurate structures. Commun. Math. Phys. **88**, 465–477(1983)

[6] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A.: A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems. Celest. Mech. **37**, 1–25(1985)

[7] Bourgain, J.: Anderson localization for quasi-periodic lattice Schrödinger operators on $\mathbb{Z}^d$, d arbitrary. Geom. Funct. Anal. **17**, 682–706(2007).

[8] Bourgain, J., Goldstein, M.: On nonperturbative localization with quasi-periodic potential. Ann. Math. **152**, 835–879(2000).

[9] Bourgain, J., Goldstein, M., Schlag, W.: Anderson localization for Schrödinger operators on $\mathbb{Z}^2$ with quasi-periodic potential. Acta Math. **188**, 41–86(2002).

[10] Bourgain, J., Wang, W. M.: Quasi-periodic solutions of nonlinear random Schrödinger equations. J. Eur. Math. Soc. **10**, 1–45(2008).

[11] Chulaevsky, V. A., Dinaburg, E. I.: Methods of KAM-theory for long-range quasiperiodic operators on $\mathbb{Z}^\nu$. Pure point spectrum. Commun. Math. Phys. **153**, 559–577(1993).

[12] Craig, W.: Pure point spectrum for discrete almost periodic Schrödinger operators. Commun. Math. Phys. **88**, 113–131(1983).

[13] Craig, W., Wayne, C. E.: Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations. Commun. Pure. Appl. Math. **46**, 1409–1498(1993).

[14] Cycon, H. L., Froese, R. G., Kirsch, W., Simon, B.: Schrödinger operators, with application to quantum mechanics and global geometry. Springer-Verlag(1987).

[15] del Rio, R., Jitomirskaya, S., Last, Y., Simon, B.: Operators with singular continuous spectrum, iv. Hausdorff dimensions, rank one perturbations, and localization. J. Anal. Math. **69**, 153–200(1996).

[16] Eliasson, L. H.: Discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators with pure point spectrum. Acta. Math. **179**, 153–196(1997).

[17] Fröhlich, J., Martinelli, F., Scoppola, E., Spencer, T.: Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model. Commun. Math. Phys. **101**, 21–46(1985).

[18] Fröhlich, J., Spencer, T.: Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy. Commun. Math. Phys. **88**, 151–184(1983).

[19] Fröhlich, J., Spencer, T., Wayne, C. E.: Localization in disordered, nonlinear dynamical systems. J. Stat. Phys. **42**, 247–274(1986).

[20] Fröhlich, J., Spencer, T., Wittwer, P.: Localization for a class of one dimensional quasi-periodic Schrödinger operators. Commun. Math. Phys. **132**, 5–25(1990).

[21] Geng, J., You, J.: A KAM theorem for one dimensional Schrödinger equation with periodic boundary conditions. J. Diff. Eqs. **209**, 1–56(2005).

[22] Geng, J., You, J.: KAM tori for higher dimensional beam equations with constant potentials. Nonlinearity **19**, 2405–2423(2006).

[23] Germinet, F.: Dynamical localization II with an application to the almost Mathieu operator. J. Stat. Phys. **95**, No.1-2, 273–286(1999).

[24] Germinet, F., De Bièvre, S.: Dynamical localization for discrete and continuous random Schrödinger operators. Commun. Math. Phys. **194**, 323–341(1998).

[25] Germinet, F., Jitomirskaya, S. Ya.: Strong dynamical localization for the almost Mathieu model. Rev. Math. Phys. **13**, 755–765(2001).

[26] Germinet, F., Klein, A.: Bootstrap multiscale analysis and localization in random media. Commun. Math. Phys. **222**, 415–448(2001).

[27] Gol'dsheid, Ya., Molchanov, S., Pastur, L.: A pure point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger operators. Funct. Anal. Appl. **11**, No.1, 1–8(1977).

[28] Gross, E. P.: Structure of a quantized vortex in boson systems. Nuovo Cimento **20**, 454–477(1961).

[29] Harper, P. G.: Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field. Proc. Phys. Soc. London Sect. A **68**, 874–878(1955).

[30] Hiramoto, H., Abe, S.: Dynamics of an Electron in Quasiperiodic Systems. II. Harper's Model. J. Phys. Soc. Jpn. **57** 1365–1371(1988).

[31] Jitomirskaya, S. Ya.: Anderson localization for the almost Mathieu equation: a non-perturbative proof. Commun. Math. Phys. **165**, 49–57(1994).

[32] Jitomirskaya, S. Ya.: Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator. Annal. Math., **150**, 1159–1175(1999).

[33] Klein, S.: Anderson localization for the discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operator with potential defined by a Gevrey-class function. J. Funct. Anal. **218**, 255–292(2005).

[34] Kuksin, S.B.: *Nearly integrable infinite dimensional Hamiltonian systems.* Lecture Notes in Mathematics, **1556**, Springer-Verlag(1993).

[35] Larcher, M., Dalfovo, F., Modugno, M.: Effects of interaction on the diffusion of atomic matter waves in one-dimensional quasiperiodic potentials. Phys. Rev. A **80**, 053606(2009).

[36] Pastur, L. A.: Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation. Commun. Math. Phys. **75**, 179–196(1980).

[37] Pastur, L., Figotin, A.: Spectra of Random and Almost Periodic Operators. Springer(1992).

[38] Pitaevskii, L. P.: Vortex lines in an imperfect Bose gas. Sov. Phys. JETP **13**, 451(1961).

[39] Pöschel, J.: Small divisors with spatial structrue in infinite dimensional Hamiltonian systems. Comment. Math. Phys. **127**, 351–393(1990).

[40] Pöschel, J.: Quasi-periodic solutions for a nonlinear wave equation. Comment. Math. Helvetici **71**, 269–296(1996).

[41] Pöschel, J.: A KAM Theorem for some nonlinear partial differential equations. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **23**, 119–148(1996).

[42] Roati, G., D'Errico, C., Fallani, L., Fattori, M., Fort, C., Zaccanti, M., Modugno, G., Modugno, M., Inguscio, M,: Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate. Nature **453**, 895–898(2008).

[43] Simon, B.: Almost periodic Schrödinger operators: IV. the Maryland model. Annal. Phys. **159**, 157–183(1985).

[44] Sinai, Ya. G.: Anderson localization for the one-dimensional difference Schrödinger operator with a quasi-periodic potential. J. Statist. Phys. **46**, 861–909(1987).

[45] Tcheremchantsev, S.: How to prove dynamical localization. Commun. Math. Phys. **221**, 27–56(2001).

[46] Trombettoni, A., Smerzi, A.: Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. Lett. **86**, 2353–2356(2001).

[47] Vittot, M., Bellissard, J.: Invariant tori for an infinite lattice of coupled classical rotators. CPT-Marseille(1985).

[48] von Dreifus, H., Klein, A.: A new proof of localization in the Anderson tight binding model. Commun. Math. Phys. **124**, 285–299(1989).

E-mail address: zyqiao1985@gmail.com