Birapport

Dédou

Janvier 2011

Invariants

Ca se passe dans un ensemble muni d'une action de groupe. On cherche à attacher à certaines figures un nombre qui ne change pas (qui est invariant) sous l'action du groupe, et qui permet éventuellement d'identifier les classes (orbites) de figures

Exemple

Le cas de deux points d'un espace affine

Soit D une droite affine, munie de l'action de son groupe affine. Les configurations de deux points n'ont pas d'invariants, le groupe affine opérant transitivement sur elles.

Rapport de trois points d'un espace affine

Soit D une droite affine, munie de l'action de son groupe affine. Les configurations de trois points A, B, C ont l'invariant $\frac{\vec{AC}}{\vec{AB}}$. Deux triplets sont homologues ssi ils ont le même rapport.

Le problème du birapport

Le rôle du birapport

Faire la même chose pour quatre points d'une droite projective.

La solution trop simple

On peut faire comme suit :

Enlever le premier point, on obtient une droite affine. Puis calculer le rapport des trois points restants.

Exercice

Calculer cet invariant pour $0, 1, \infty, x$.

Remarque

C'est plus ou moins ce qu'on fait.

Espaces vectoriels de dimension 1

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension 1. On note $\otimes^{-n}E$ le dual de l'espace vectoriel des fonctions homogènes de degré n sur E. C'est un autre espace vectoriel de dimension 1.

Exercice

Montrer que $\otimes^{-n}E$ et $\otimes^{n}E$ sont en dualité.

Déterminant dans $\mathbb{R}^n$

Rappel

Etant donné n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on connaît leur déterminant, qui est un nombre.

Exercice

Le déterminant est multilinéaire alterné : rappelez ce que ça veut dire.

Déterminant dans un espace vectoriel

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension n, on note $\bigwedge^n E$ le dual de l'espace vectoriel des n-formes multilinéaires alternées sur E. Il est de dimension 1.

Définition

Le déterminant $|v_1 ... v_n|$ de n vecteurs $v_1 ... v_n$ de l'espace E de dimension n, c'est l'évaluation en $(v_1 ... v_n)$ vue comme élément de $\bigwedge^n E$.

Bidéterminant dans E

Définition

Appelons bidéterminant de $n+1$ vecteurs distincts dans un espace vectoriel de dimension n le rapport entre le déterminant des n premiers et le déterminant des n derniers.

Exercice

Expliquez pourquoi et comment cette définition est correcte.

Exercice

Soit u, v une base d'un plan. Calculer le bidéterminant de $(u, v, 2u + 3v)$.

Exercice

Montrer comment si E est un espace vectoriel de dimension $n+1$ le bidéterminant définit une fonction (partielle) sur $P(E)^n \times E^2$.

Birapport de quatre points

Proposition

Soit E un plan vectoriel. Alors la fonction

$$(v_1, ..., v4) \mapsto \frac{|v_1\ v_3|.|v_2\ v_4|}{|v_2\ v_3|.|v_1\ v_4|}$$

est homogène de multi-degré $(0, 0, 0, 0)$ non constante. Lafonction correspondante sur $P(E)^4$ bien définie en dehors de la grosse diagonale.

Vocabulaire

Cette fonction de quatre points distincts d'une droite projective s'appelle le birapport.

Proposition

Les homographies conservent le birapport.

Birapport de quatre nombres

Exercice

Calculer le birapport de quatre nombres.

Le birapport à pied

Proposition

Soient A, B, C, D quatre points distincts d'une droite projective L et $f : L \to \mathbb{P}^1$ l'homographie envoyant A, B, C sur $0, 1, \infty$. Alors le birapport de A, B, C, D esst $f(D)$.

Extension du birapport

Exercice

Etendre la définition du birapport au cas où deux points sont confondus. Est-ce un prolongement par continuité ?

Permutations du birapport

Exercice

Calculer l'action des 24 permutations des quatre points sur le birapport. Etendre cette action en une action sur la droite projective.

Trirapport de neuf points

Exercice

Définir le trirapport de neuf points d'un plan projectif. Montrer bien que cette fonction n'est pas constante.

Problème

Etudier l'action des permutations sur le trirapport.

Pourquoi birapport ?

Exercice

Etant donnés quatre points d'une droite affine, exprimer leur birapport comme rapport de rapport de mesures algébriques de segments joignant les points.

Division harmonique

On sait qu'une homographie d'une droite projective qui fixe quatre points est forcément l'identité (déjà trois !).

Exercice

Etudier les homographies d'une droite projective qui permutent quatre points donnés. Combien y en a-t-il ?

Birapport de quatre droites concourantes

Proposition

Soit P un plan projectif, et O un point de P. Les droites de P constituent un plan projectif, et celles qui passent par O constituent une droite dans ce plan. Un quadruplet de telles droites a donc un birapport.

Proposition

Si quatre droites de P sont concourantes en O, leur birapport est égal à celui de leurs traces sur toute droite ne passant pas par O.

Invariants de figures plus complexes

Exercice

Trouver un invariant projectif pour cinq points d'une droite, pour cinq points d'un plan.