**1.a** Une fraction $\frac{a}{b}$, avec $a$ et $b$ nombres réels, représente un nombre réel si et seulement si le dénominateur $b$ est non nul. Ainsi $\frac{1}{\cos(\pi)}$ représente un nombre réel mais pas $\frac{1}{\sin(\pi)}$ ni $\frac{1}{1-\log^4 e}$. De même $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ n'est pas défini pour $x = \pi/2$ modulo $\pi$.

**1.b** Règle : pour $a$ un nombre réel, l'expression $a^b$ représente le réel 1 lorsque $b$ est l'entier nul, le produit de $a$ $b$-fois par lui même lorsque $b$ est un entier strictement positif, le réel $\frac{1}{a^{-b}}$ lorsque $b$ est un entier strictement négatif et $a$ est non nul, l'unique réel $x$ tel que $x^n = a$ lorsque $b = \frac{1}{n}$ avec $n$ entier positif impair, l'unique réel positif $x$ tel que $x^n = a$ lorsque $b = \frac{1}{n}$ avec $n$ entier strictement positif pair et $a$ est positif, le réel $(a^{\frac{1}{q}})^p$ lorsque $b = \frac{p}{q}$ avec $q$ entier strictement positif et $p$ entier non nul premier à $q$ et $a^{\frac{1}{q}}$ est défini, enfin le réel $\mathrm{e}^{b \log a}$ lorsque $b$ est réel et $a$ est strictement positif.

$(\log x)^{\sin \pi} = (\log x)^0$ représente un nombre réel dès que $\log x$ est défini, donc pour $x = 1$ mais pas pour $x = -1$. $(\cos \pi)^{\frac{x}{2}}$ n'est pas défini pour $x = 1$ ou $-1$ : $\cos \pi$ est strictement négatif. $(x\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$ est défini pour $x = 1$ mais pas pour $x = -1$.

**2.a** $\left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array}\right)$ représente l'entier $\frac{p!}{(p-q)!\,q!}$ lorsque $p$ et $q$ sont des entiers positifs avec $q \leq p$ (par convention $0!$ représente l'entier 1). Ainsi $\left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array}\right) = 70$.

$7 + 8 + \cdots + 100 = \frac{1}{2}(7 + 100) \times 94 = 5029$ (somme de $n$ termes consécutifs d'une suite arithmétique).

$3 + 3^2 + \cdots + 3^9 = 3\frac{1-3^9}{1-3} = 29523$ (somme de $n$ termes consécutifs d'une suite géométrique).

**2.b** $(2 + \sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = 7 - 4\sqrt{3}$

$x^{\cos 3}$ est de la forme $x^\alpha$ avec $\alpha < 0$ ($x \mapsto \cos x$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ ; $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ implique $-1 < \cos 3 < 0$) donc $x^{\cos 3}$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.

$\frac{(1{,}01)^n}{n^{10000}}$ est de la forme $\frac{\mathrm{e}^{\alpha n}}{n^\beta}$ avec $\alpha = \log 1,01 > 0$ (la fonction log est strictement croissante sur $]0, +\infty[$) donc $\frac{(1{,}01)^n}{n^{10000}}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**2.c** On écrit par exemple $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ puis $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

**3.a** $20121_3 = 1 + 2 \times 3 + 3^2 + 2 \times 3^4 = 178$

$2728 = 3 \times 909 + 1 = 3^3(3^2 \times 11 + 2) + 1 = 3^3(3^2(3^2 + 2) + 2) + 1 = 10202001_3$

**3.b**
$$\begin{aligned}
\frac{127}{13} &= 9 + \frac{10}{13} \\
&= 9 + \frac{1}{10}\left(\frac{100}{13}\right) = 9 + \frac{1}{10}\left(7 + \frac{9}{13}\right) \\
&= 9,7 + \frac{1}{100}\left(\frac{90}{13}\right) = 9,7 + \frac{1}{100}\left(6 + \frac{12}{13}\right) \\
&= 9,76 + \frac{1}{10^3}\left(9 + \frac{3}{13}\right) \\
&= 9,769 + \frac{1}{10^4}\left(2 + \frac{4}{13}\right) \\
&= 9,7692 + \frac{1}{10^5}\left(3 + \frac{1}{13}\right) = 9,769230 + \frac{1}{10^6}\left(\frac{10}{13}\right) \\
&= 9,\overline{769230}\ldots
\end{aligned}$$

$2,01\overline{21}\cdots = \frac{201}{100} + \frac{1}{100}0,\overline{21}\ldots.$
Posons $a = 0,\overline{21}\ldots$ ; $100a = 21 + a$ donc $a = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$. On obtient $2,01\overline{21}\cdots = \frac{201}{100} + \frac{7}{100\times 33} = \frac{332}{165}$.
Observons également $2,01\overline{21}\cdots = 2,0\overline{12}\cdots = 2 + \frac{1}{10}\frac{12}{99}$ etc.

**3.d** $\frac{\pi}{81} = (\frac{180}{81})^{\mathrm{o}} = 2^{\mathrm{o}} + (\frac{2}{9})^{\mathrm{o}} = 2^{\mathrm{o}} + (\frac{120}{9})' = 2^{\mathrm{o}} + 13' + (\frac{1}{3})' = 2^{\mathrm{o}} + 13' + 20''$.
$\frac{1}{9}(7\mathrm{h}\,52\mathrm{mn}\,24\mathrm{s}) = \frac{7\times 60}{9}\mathrm{mn} + \frac{52}{9}\mathrm{mn} + \frac{8}{3}\mathrm{s} = 46\mathrm{mn} + \frac{2\times 60}{3}\mathrm{s} + 5\mathrm{mn} + \frac{7\times 60}{9}\mathrm{s} + \frac{8}{3}\mathrm{s} = 51\mathrm{mn} + 40\mathrm{s} + 46\mathrm{s} + \frac{2}{3}\mathrm{s} + 2\mathrm{s} + \frac{2}{3}\mathrm{s} = 52\mathrm{mn} + 29\mathrm{s} + \frac{1}{3}\mathrm{s}$.