Formuler

1. Rédiger

Traduire informellement et évaluer les énoncés suivants; pour chaque énoncé faux, proposer une variante juste.

$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \leq y \Longrightarrow x^2 \leq y^2;$

$\forall x, y \in [0, +\infty[,\ x^3 < y^3 \Longleftrightarrow x < y;$

$\forall x, y \in \mathbf{R},\ \max(x, y) = \min(x, y) \Longrightarrow x = y;$

$\forall x, y \in \mathbf{R},\ \max(x, y) = x \text{ ou } \max(x, y) = y;$

$\forall x, y, a \in \mathbf{R},\ x < y \Longrightarrow x + a < y + a;$

$\forall x, y, a, b \in \mathbf{R},\ x < y \text{ et } a \leq b \Longrightarrow x + a < y + b;$

$\forall x, y \in \mathbf{R}, \forall a \in [0, +\infty[,\ x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay;$

$\forall x, y, a, b \in [0, +\infty[,\ x < y \text{ et } a \leq b \Longrightarrow ax < by;$

$\forall x \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ n \leq x \leq n + 1;$

$\forall z \in \mathbf{C},\ \exists r \in \mathbf{C},\ r^3 = z;$

$\exists z, t \in \mathbf{C},\ |z + t| \neq |z| + |t|;$

$\forall x, y \in \mathbf{R},\ e^{x+y} = e^x e^y.$

2. Formaliser

Proposer une interprétation formelle pour les énoncés suivants:

(a) Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées.
(b) Deux nombres positifs sont toujours rangés dans le même ordre que leurs logarithmes.
(c) L'inverse d'un produit est le produit des inverses.
(d) Si le produit de deux nombres est nul, c'est que l'un des deux est déjà nul.
(e) La puissance d'une somme n'est pas forcément égale à la somme des puissances.
(f) Un nombre complexe non nul est déterminé par son module et son argument.
(g) Un nombre complexe non nul n'est déterminé ni par son module ni par son argument.
(h) Tout entier est somme de quatre carrés.
(i) Entre deux cubes consécutifs, il y a un carré.
(j) L'addition des complexes est commutative.
(k) La multiplication des entiers est associative.

3. Plus difficile

(a) Tout nombre positif a une unique racine carrée positive.
(b) Tout nombre positif a une unique racine cubique, qui est positive.
(c) Deux nombres complexes sont égaux dès que leurs carrés et leurs cubes le sont.
(d) Un système de deux équations linéaires à deux inconnues peut avoir deux solutions.
(e) Tout entier suffisamment grand est de la forme $8p + 9q$.

4. Retour sur validité

Expliquer deux conventions différentes pour la validité de $A \Longrightarrow B$, avec leurs avantages et inconvénients.