Corrigé de 6.1

Première tactique:

On déplie la def de bornée: le but devient:

$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq \frac{x^2}{x^2+1}$ et $\frac{x^2}{x^2+1} \leq M$.

On exhibe $m := 0$ puis $M := 1$. Le but devient

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{x^2}{x^2+1}$ et $\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$.

On introduit x; le contexte contient donc le réel x et le nouveau but est

$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1}$ et $\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$.

Ici, on applique une tactique “Casser et” (il y a aussi une tactique “casser ou” que je n'ai pas non plus mise dans le cours virtuel mais vous savez les inventer) qui remplace ce but par les deux buts $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1}$, et $\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$.

Pour le premier, on applique une ressource qui dit

$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a$ et $0 < b \Longrightarrow 0 \leq \frac{a}{b}$ aux arguments $a := x^2$ et $b := x^2 + 1$. Ceci génère deux nouveaux buts:

$0 \leq x^2$ et $0 \leq x^2 + 1$.

Pour le premier, on applique une ressource qui dit

$\forall a \in \mathbb{R}, 0 \leq a^2$ avec $a := x$. Ceci ne génère pas de nouveau but.

Pour le second, on applique une ressource qui dit

$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a$ et $0 < b \Longrightarrow 0 < a + b$ aux arguments $a := x^2$ et $b := 1$.

Ceci génère deux nouveaux buts:

$0 \leq x^2$ et $0 < 1$. On vient de démontrer le premier, et le second est une ressource.

On passe à $\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$.

Ici on applique une ressource qui dit:

$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq a$ et $a < b \Longrightarrow \frac{a}{b} \leq 1$ aux arguments $a := x^2$ et $b := x^2 + 1$.

Ceci génère deux nouveaux buts:

$0 \leq x^2$ et $x^2 < x^2 + 1$. On a déjà prouvé le premier (dans le même contexte). Pour le second, on invoque une ressource qui dit

$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 < b \Longrightarrow a < a + b$ avec $a := x^2$ et $b := 1$.

Ceci génère un dernier but $0 < 1$ qui est une ressource.