Méthodo Exos8 **Analyser une preuve** 10/12/01 Deug MIASSM TC

Dans chacune des textes suivants:

a) reconstituez l'enchaînement des buts (avec leurs contextes) par les tactiques;

b) recensez les ressources utilisées et leurs arguments effectifs;

c) donnez une preuve deux fois plus détaillée.

1. $\sqrt{2}$ est irrationnel

Montrons donc que si p et q sont deux entiers avec $p \geq 1$, alors p/q ne peut être égal à $\sqrt{2}$. On peut évidemment supposer p positif, et p ou q impair. Dans ces conditions, il suffit de s'assurer que $p^2 : q^2$ ne peut être égal à 2. Or, soit p est impair, auquel cas p^2 l'est aussi et ne peut donc être égal à $2q^2$, soit p est pair, auquel cas p^2 est divisible par 4 tandis que $2q^2$ ne l'est pas.

2. Pour a et b complexes, on a $a.b = 0 \Longleftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.

Preuve (Liret-Martinais). Si par exemple $a = 0$, alors nous savons déjà que $a.b = 0.b = 0$. Supposons $a.b = 0$ et $a \neq 0$. Il vient $b = 1.b = ((1/a).a).b = (1/a).(a.b) = (1/a).0 = 0$.

3. Si b est non nul, $|a| \leq |a+b|$ et $|a| \leq |a-b|$ implique $|a| \leq |b|/2$.

Preuve (Silici). Par homogénéité, on peut diviser par b. Il faut donc démontrer
$|a| \leq |a+1| \;\text{ et }\; |a| \leq |a-1| \Longrightarrow |a| \leq 1/2$.
On observe que le signe de a est indifférent, supposons-le positif. La première inégalité est inutile mais la seconde donne le résultat.

4. Exercice: Résoudre l'équation $1 + 2z + 2z^2 + ... + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Solution [Flory): En multipliant le premier membre par $1 - z$, on se ramène à l'équation
$(1 + z)(1 - z^n) = 0$ dont la racine $z = 1$ doit être exclue.