PARTIEL D'HIVER SAMEDI 5 JANVIER: CONSULTEZ L'AFFICHAGE

Méthodo Exos9 **Révisions (preuves)** 17/12/01 Deug MIASSM TC

Dans chacun des textes suivants:

a) reconstituez l'enchaînement des buts (avec leurs contextes) par les tactiques;

b) recensez les ressources utilisées et leurs arguments effectifs;

c) donnez une preuve deux fois plus détaillée.

1. Pour $x \leq -1$, on a $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour $x \leq -1$, on a $x^2 \geq 1$, donc $x^2+1 \geq 2$, d'où $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{2}$. Par conséquent, on a bien $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ est bornée.

Cette fonction est positive donc minorée. Pour montrer qu'elle est majorée par $\frac{1}{2}$, il nous suffit de montrer, pour x quelconque, $\sqrt{x^2+4} \geq 2$, ce qui résulte du fait que tout carré est positif.

3. Pour tout couple (z, z') de nombres complexes, $|zz'| = |z||z'|$.

Preuve (Guinin/Joppin). $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = (z\overline{z})(z'\overline{z'}) = |z|^2|z'|^2$.

4. Pour tout réel a strictement positif: $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Preuve (Guinin/Joppin). La relation $(\sqrt{a})^2 = a$ et la propriété 6 donnent $2 \ln \sqrt{a} = \ln a$, d'où la conclusion.

5. Pour tout réel a strictement positif: $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

Preuve(d'après Guinin/Joppin). Il suffit de prouver $\ln \frac{1}{a} + \ln a = 0$, ou encore, d'après le théorème 1, $\ln(\frac{1}{a}.a) = 0$, ce qui résulte de $\ln 1 = 0$.

6. Si deux fonctions ont même sens de variation sur R, leur composée est croissante.

Preuve. Soient par exemple f et g deux fonctions décroissantes sur $\mathbf{R}$, et x et y deux réels avec $x \leq y$. Comme f est décroissante, on déduit $f(x) \geq f(y)$, puis $g(f(x)) \leq g(f(y))$ puisque g est aussi décroissante, ce qui prouve que $g \circ f$ est croissante.