Systèmes linéaires de courbes de genre 5

Benoîte de Saporta

Stage de 2ème année sous la direction de André Hirschowitz
Laboratoire de mathématiques J.A. Dieudonné - Nice

Juin - Juillet 1999

Table des matières

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant: *étant donnés r points du plan projectif complexe, on cherche toutes les courbes de degré fixé passant par ces points avec des multiplicités imposées.*

On s'intéresse notamment à la dimension de ces espaces de courbes, à l'irréductibilité et à la lissité (en dehors des points de multiplicité imposées) de ces courbes. On sait résoudre ce problème dans plusieurs cas, par exemple si les multiplicités sont égales à un, ou si le genre des courbes cherchées est inférieur à 4. J'ai regardé ce problème pour les courbes de genre 5.

1 Définitions et notations

1.1 Classes de courbes

Soient $P_1, \dots, P_r$ des points de $\mathbb{P}^2$ et $x = (P_1, \dots, P_r) \in (\mathbb{P}^2)^r$ une position de ces points. Soient $m_1, \dots, m_r$ des entiers positifs. On note $\underline{\mathrm{d}} = (d; m_1, \dots m_r)$ la *classe* des courbes de degré d, assignées à passer par les points P_i avec multiplicité au moins m_i.

Exemple: on note $(3; 2, 1, 1, 1) = (3; 2, 1^3)$ la classe des cubiques ayant un point double en P_1 et passant par P_2, P_3 et P_4.

On note $\mathcal{L}_x(\underline{\mathrm{d}})$ le *système linéaire* des courbes de degré d, assignées à passer par les points P_i avec multiplicité au moins m_i, quand les P_i sont en position x.

Enfin on note $\mathcal{D}_x(\underline{\mathrm{d}})$ la courbe générique de système précédent dans S_x^r, le plan éclaté aux points $P_1, \dots, P_r$. On note parfois pour abréger $D = \mathcal{D}_x(\underline{\mathrm{d}})$

La notation des courbes sous forme de classes est très pratique. En effet, si une courbe C est composante fixe d'une autre courbe D, oter cette composante revient à soustraire terme à terme la classe de C à celle de D.

1.2 Dimension attendue

L'espace vectoriel des courbes de degré au plus d est isomorphe à l'espace vectoriel des polynômes de deux variables de degré au plus d, qui est de dimension $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Quand on impose aux courbes de passer par le point P avec multiplicité au moins m, on a $\frac{m(m+1)}{2}$ conditions linéaires qui correspondent à l'annulation de toutes les dérivées du polynôme jusqu'à l'ordre $m-1$.

La *dimension attendue* du système $\mathcal{L}_x(\underline{\mathrm{d}})$ est

$$\chi(\underline{\mathrm{d}}) = \max\left\{ \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i+1)}{2}, \quad 0 \right\}$$

Cette dimension ne correspond pas toujours à la dimension réelle car quand on impose à une courbe de passer par plusieurs points, il se peut que les équations obtenues ne soient pas linéairement indépendantes. On dira qu'un système est *régulier* ou *non spécial* si sa dimension réelle est égale à sa dimension attendue.

Exemples: La classe $(1; 1^2)$ est de dimension attendue 1. C'est aussi sa dimension réelle car il existe une seule droite passant par deux points.

La classe $(2;2^2)$ est de dimension attendue 0, mais il existe une conique ayant deux points double, c'est deux fois la droite passant par ces deux points. Cette classe n'est donc pas régulière.

On dit qu'une classe est *effective* en position x si sa dimension réelle dans cette position est strictement positive.

Un système de courbes est un *pinceau* si sa dimension réelle est 2.

1.3 Intersection de deux courbes

Le *nombre d'intersections* de deux classes $\underline{c} = (c; n_1, \ldots, n_r)$ et $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r)$ est:

$$\underline{c} \cdot \underline{d} \ = \ cd - \sum_{i=1}^{r} m_i n_i$$

Si $\underline{c}$ et $\underline{d}$ sont sans composantes communes, ce nombre est positif et correspond, par le théorème de Bezout, au nombre de points de $\mathcal{D}(\underline{d}) \cap \mathcal{D}(\underline{c})$ dans le plan éclaté aux points P_i.

On note $\underline{d} - P_i^C$ la classe des courbes de classe $\underline{d}$ et qui de plus sont assignées à avoir la même tangente que la courbe C au point P_i, c'est-à-dire qu'on impose à C et D de se couper en un point particulier du plan éclaté.

On dit que deux courbes C et D sont *transverses* si elles ont des tangentes différentes aux points où elles se coupent.

1.4 Genre

Le genre d'une classe $\underline{d}$ est:

$$g(\underline{d}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i-1)}{2}$$

2 Le méthode d'Horace

Les démonstrations de tous les lemmes sont dans [3].

2.1 Principe de la méthode

On considère un système de courbes planes de degré d, assignées à passer avec des multiplicités imposées par plusieurs points génériques P_i du plan projectif complexe. On choisit une courbe irréductible C de degré c, et on spécialise plusieurs des points P_i sur C jusqu'à ce que C devienne une composante fixe du système (dans cette position spéciale). On peut alors "soustraire" C au système initial. Sous certaines conditions, si le système résiduel est régulier, le système initial l'est aussi, et si la courbe générique du système résiduel est irréductible et lisse, alors la courbe générique du système initial l'est aussi.

Le système résiduel étant de dimension inférieure, il est souvent plus facile à étudier. En appliquant plusieurs fois la méthode d'Horace, on peut se ramener aux courbes de très bas degré qui sont bien connues.

2.2 Le lemme d'Horace

Lemme 2.2.1 (Lemme d'Horace) *Soient* $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ *et* x, y *deux points de* X, *l'ensemble des* r*-uples de points distincts de* $(\mathbb{P}^2)^r$, *tels que* x *se spécialise en* y. *Soit* C *une courbe de* $\mathbb{P}^2_y$ *et* $\tilde{C}_y$ *sa transformée dans le plan éclaté* S_y. *On suppose que* $\tilde{C}_y$ *est géométriquement irréductible et lisse.*

Dimension et spécialisation. *Supposons que:*

1. $\underline{d} \cdot \underline{c} + 1 - g(\underline{c}) = -a$ *où* $a \geq 0$,
2. *en position* y, *il y a* $g(\underline{c})$ *points libres sur* C, *affectés de multiplicité positive,*
3. *si* $a \geq 1$, *il y a* $a+1$ *points* $P_{i_1}, \ldots, P_{i_{a+1}}$ *affectés de multiplicité supérieures à* 1 *tels que en position* x, *ces* $a+1$ *points sont libres dans le plan* $\mathbb{P}^2$
   en position y *ils sont libres sur* C,
4. *si* $a = 0$, $\mathcal{L}_y(\underline{d} - \underline{c})$ *a la dimension attendue* $\chi(\underline{d})$
   si $a \geq 1$, $\mathcal{L}_y(\underline{d} - \underline{c} - P^C_{i_1} - \ldots - P^C_{i_{a+1}})$ *a la dimension attendue* $\chi(\underline{d} - \underline{c}) - a - 1 \; = \; \chi(\underline{d}) - 1$

   alors $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ *a la dimension attendue.*

Irréductibilité. *Si de plus,* $\chi(\underline{d}) \geq 1$ *et*

5. *si* $a = 0$, *la classe* $\underline{c}$ *n'est pas effective en position* x,
6. $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$ *est géométriquement irréductible*

   alors $\mathcal{D}_x(\underline{d})$ *est géométriquement irréductible et réduite*

Lissité. *Si enfin*

7. *si* $a = 0$, y *est lisse dans l'adhérence de* x,
8. $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$ *rencontre* $\tilde{C}_y$ *transversalement,*
9. $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c}) \cap \tilde{C}_y$ *est irréductible (pas géométriquement),*
10. $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$ *est lisse*

    alors $\mathcal{D}_x(\underline{d})$ *est lisse.*

C est appelée la *courbe exploitée*, la classe $\underline{d} - \underline{c}$, le système $\mathcal{L}(\underline{d} - \underline{c})$ et la courbe $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$ sont respectivement appelés classe, système et courbe résiduels.

2.3 Lemmes complémentaires

On dispose également de lemmes pour vérifier certaines hypothèses techniques du lemme d'Horace, notemment les hypothèses de lissité.

Lemme 2.3.1 *Soient* x *et* y *deux points de* X *tels que* x *se spécialise en* y. *Soient* C *une courbe irréductible de* S_x *et* D *la courbe générique d'un pinceau* $\mathcal{L}_x(d)$ *de* S_x. *Soit* $\underline{d} \cdot \underline{c} \; = \; n \geq 1$ *le nombre d'intersections de* D *et* C. *Si*

- *la dimension de* $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ *n'augmente pas lors de la spécialisation en* y
- *la courbe* C *se spécialise en position* y *en une union de* n *courbes irréductibles* $C \; = \; C_1 \cup \ldots \cup C_n$ *telles que* $\underline{c}_i \cdot \underline{d} \; = \; 0$ *ou* 1,
- *Pour tout* i $(1 \leq i \leq n)$ *le système* $\mathcal{L}_y(\underline{d} - \underline{c}_i)$ *est vide,*

alors D *rencontre* C *transversalement et* $D \cap C$ *est irréductible.*

Lemme 2.3.2 *Si D et C sont deux courbes de S_x sans composante commune et si $\underline{d} \cdot \underline{c} = 1$, alors D rencontre C transversalement et $D \cap C$ est irréductible.*

Lemme 2.3.3 *Doit D la courbe générique d'un système de dimension supérieure ou égale à un. Si D est réduite et irréductible, et si $\underline{d} \cdot \underline{d} \leq 3$, alors D est lisse.*

3 Courbes de genre 5

3.1 Genre inférieur à 4

Pour les systèmes linéaires de courbes de genre inférieur à 4, T. Mignon et S. Bossini ont montré dans [3] et [1] le théorème suivant:

Théorème 1 *Soient x le point générique de $(\mathbb{P}^2)^r$ et $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ tels que $m_1 \geq \ldots \geq m_r \geq 1$ et $d \geq m_1 + m_2 + m_3$. Si $\chi(\underline{d}) \geq 0$ et $0 \leq g(\underline{d}) \leq 4$, alors le système $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ a la dimension attendue et sa courbe générique est irréductible et lisse (sauf si $\underline{d} = (3n; n^9)$, $n \geq 2$, auquel cas on a n fois la cubique passant par les neuf points.).*

Ce théorème se limite au cas des classes dites *adéquates*, c'est-à-dire aux classes $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r)$ telles que $m_1 \geq \ldots \geq m_r \geq 1$ et $d \geq m_1 + m_2 + m_3$. En fait cette condition n'est pas très restrictive. En effet, à partir de n'importe quelle courbe, on peut se ramener à une courbe $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r)$ telle que $m_1 \geq \ldots \geq m_r$ et $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ par les transformations de Cremona.

Transformations de Cremona *En position générique, les courbes génériques et les systèmes linéaires correspondant aux classes $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r)$ et $\underline{d}' = (2d - m_1 - m_2 - m_3; d - m_2 - m_3, d - m_1 - m_3, d - m_1 - m_2, m_4, \ldots, m_r)$ ont les mêmes propriétés (dimension, irréductibilité et lissité).*
De même pour $\underline{d}$ et $\underline{d}'' = (d; m_1, \ldots, m_{i-1}, m_j, m_{i+1}, \ldots, m_{j-1}, m_i, m_{j+1}, \ldots, m_r)$.

On dispose également de deux théorèmes sur la dimension (voir [3] pour le premier et [4] pour le deuxième):

Théorème 2 *Soient x le point générique de $(\mathbb{P}^2)^r$ et $\underline{d} = (d; m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$ tels que $m_1 \geq \ldots \geq m_r \geq 1$et $d \geq m_1 + m_2 + m_3$. Si de plus $m_i \leq 4$ pour tout i, $(1, \leq i \leq r)$, alors le système $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ a la dimension attendue.*

Théorème 3 (Multiplicité un) *Soient x le point générique de $(\mathbb{P}^2)^r$ et $\underline{d} = (d; 1^r)$. Alors le système $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ est régulier.*

3.2 Liste des courbes de genre 5

S. Bossini a montré dans [1] que l'ensemble des classes adéquates de dimension attendue positive et de genre g fixé ($g \geq 2$) est fini. Bossini et Mignon ont démontré le théorème 1 en étudiant tous les cas grâce à la méthode d'Horace. J'ai assayé d'appliquer la même méthode à des courbes de genre 5.

Les courbes adéquates de genre 5 sont:

no.	classe $(\underline{d})$	$\chi(\underline{d})$	no.	classe $(\underline{d})$	$\chi(\underline{d})$	no.	classe $(\underline{d})$	$\chi(\underline{d})$
1	$(5;2)$	18	17	$(11;5,3^{10})$	3	33	$(18;6^7,5^2,3^2)$	1
2	$(6;2^5)$	13	18	$(12;4^6,3^4,2^2)$	1	34	$(18;6^7,5^2,4)$	3
3	$(7;2^{10})$	6	19	$(12;4^7,3^2,2^2)$	3	35	$(18;6^8,5,2)$	4
4	$(7;3,2^7)$	9	20	$(12;4^8,2^2)$	5	36	$(19;7,6^8,4,2)$	1
5	$(7;5)$	21	21	$(13;4^{10},2)$	2	37	$(21;7^8,5,4,2)$	1
6	$(8;3^2,2^{10})$	3	22	$(13;5,4^7,3^3)$	2	38	$(21;7^8,6,2^2)$	2
7	$(8;4,2^{10})$	5	23	$(13;5,4^8,2^3)$	1	39	$(22;8,7^7,6^2)$	2
8	$(8;6,2)$	21	24	$(13;5,4^8,3)$	4	40	$(24;8^7,7^2,5)$	2
9	$(9;3^5,2^8)$	1	25	$(15;5^5,4^6)$	1	41	$(24;8^8,7,3)$	3
10	$(9;3^6,2^5)$	4	26	$(15;5^7,4^2,3,2)$	2	42	$(27;9^5,8^5)$	1
11	$(9;3^7,2^2)$	7	27	$(15;5^8,3,2^3)$	1	43	$(27;9^8,8,3,2)$	1
12	$(9;5,2^{13})$	1	28	$(15;5^8,3^2)$	4	44	$(28;10,9^7,8,7)$	1
13	$(10;3^{10},2)$	3	29	$(15;5^8,4)$	6	45	$(31;11,10^8,6)$	1
14	$(10;4,3^7,2^4)$	2	30	$(16;5^{10})$	3	46	$(33;11^8,9,6)$	1
15	$(10;4,3^8,2)$	5	31	$(16;6,5^7,4^2,3)$	1	47	$(33;11^8,10,4)$	2
16	$(11;4^2,3^9,2)$	1	32	$(18;6^6,5^4,2)$	1	48	$(45;15^8,14,5)$	1

Pour traiter les courbes numéro $1,2,3,4,5,7,8,10,11,15,20,24,28,29$ et 35 qui sont toutes de dimension attendue supérieure ou égale à 4, on utilise le lemme suivant démontré dans [3]:

Lemme 3.2.1 *Soient $x = (P_1,\dots,P_r) \in X^r$ et $\underline{d} = (d;m_1,\dots,m_r)$ une classe telle que $\chi(\underline{d}) \geq 4$. Soit P_{r+1} un point générique de $\mathbb{P}^2_x$ et $x' = (P_1,\dots,P_r,P_{r+1})$ le point de X^{r+1} correspondant.*
Si la classe $\underline{d}' = (d;m_1,\dots,m_r,2)$ est non spéciale et si la courbe $\mathcal{D}_{x'}(\underline{d}')$ est géométriquement irréductible et lisse, alors la classe $\underline{d}$ est aussi non spéciale, et la courbe $\mathcal{D}_x(\underline{d})$ est aussi géométriquement irréductible et lisse.

Quand on rajoute un point double, le genre baisse de un, et la condition $\chi \geq 4$ permet de garder une dimension attendue positive. Grace à ce lemme, on se ramène donc aux courbes de genre 4 et on peut utiliser le théorème 1.

La courbe 22 a été traitée par J.F. Quint dans [5]. J'ai étudié les courbes restantes jusqu'à la trentième. L'étude de ces courbes suit. La première courbe est traitée en détail, les autres sont plus abrégées.

4 Les premières courbes de genre 5

4.1 La courbe n.30

$\underline{d} = (16;5^{10})$ et $\chi = 3$. Cette courbe a pour dimension attendue 3. On peut donc rajouter deux points simples. On étudie en fait $\underline{d} = (16;5^{10},1^2)$ qui a pour dimension attendue 1. On note x_0 la position initiale qui est générique. On notera x_i les positions spéciales successives, et $\underline{d}_i$ les résiduelles successives correspondantes (on adoptera les mêmes notations pour les courbes suivantes).

4.1.1 Première spécialisation

On exploite la cubique C qui a un nœud en P_1 et qui passe par $P_2,\dots,P_7$. On spécialise P_8 et P_9 sur C.

$\underline{c} = (3;2,1^8,0^3)$ et $g(\underline{c}) = 0$

Vérifions les hypothèses du lemme d'Horace:

1) $\underline{d} \cdot \underline{c} + 1 = -1$
$a = 1$

2) Il n'y a rien à vérifier car $g(\underline{c}) = 0$.

3) P_8 et P_9 sont libres dans $\mathbb{P}^2$ en position x_0, et libres sur C en position x_1.

4) La résiduelle est $\underline{d}_1 = (13;3,4^8,5,1^2)$
On a $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$ et $\mathcal{D}(\underline{d}_1 - P_8^C - P_9^C)$ et C se coupent au moins deux fois dans le plan éclaté aux points P_i, et C est irréductible, donc C est composante fixe du système $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - P_8^C - P_9^C)$. On peut donc soustraire C sans changer la dimension réelle.
Soit $\underline{d}_2' = (10;1,3^8,5,1^2)$ la résiduelle. Pour calculer sa dimension, on applique le lemme d'Horace plusieurs fois:

- Soit T la cubique passant par $P_1,\dots,P_{10}$ où on spécialise P_{11}.
  $\underline{t} = (3;0,1^{10},0)$
  $\underline{d}_2' \cdot \underline{t} = 0 = a$
  $\underline{d}_3' = (7;1,2^8,4,0,1)$
- Soit L la droite P_8, P_9, où on spécialise P_{10}
  $\underline{l} = (1;0^7,1^3,0^2)$, $a = \underline{d}_3' \cdot \underline{l} + 1 = 0$
  $\underline{d}_4' = (6;1,2^6,1^2,3,0,1)$
- Soit M la droite P_{10}, P_6 où on spécialise P_7
  $\underline{m} = (1;0^5,1^2,0^2,1,0^2)$, $a = \underline{d}_4' \cdot \underline{m} + 1 = 0$
  $\underline{d}_5' = (5;1,2^4,1^4,2,0,1)$
- On spécialise P_5 sur L.
  $\underline{d}_6' = (4;1,2^3,1^3,0^2,1,0,1)$
- On spécialise P_4 sur M.
  $\underline{d}_7' = (3;1,2^2,1^2,0^6,1)$. Les points de multiplicité non nulle sont en position générique. On sait alors que $\mathcal{L}(\underline{d}_7')$ a la dimension attendue, et donc en remontant pas à pas, $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - P_8^C - P_9^C)$ a la dimension attendue $\chi = 0$.

5) Il n'y a rien à vérifier car a est non nul.

6) Voir deuxième spécialisation.

7) a est non nul.

8) et 9) On a $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$, et 4) montre que C n'est pas composante fixe de D_1. De plus C est irréductible, donc C et D_1 n'ont pas de composante commune. On applique le lemme 2.3.2.

10) Voir deuxième spécialisation.

4.1.2 Deuxième spécialisation

$\underline{d}_1 = (13;3,4^8,5,1^2)$ et $\chi(\underline{d}_1) = 2$.
On exploite la cubique Q passant par $P_2,\dots,P_{10}$ où on spécialise P_{11} et P_{12}

. $\underline{q} = (3; 0, 1^{11})$ et $g(\underline{q}) = 1$

1) $\underline{d}_1 \cdot \underline{q} + 1 - g(\underline{q}) = 0$

2) P_{12} est libre sur Q.

3) $a = 0$.

4) Voir troisième spécialisation, $\underline{d}_2 = (10; 3^9, 4, 0^2)$

5) Q n'est pas effective en position x_1.

6) Voir troisième spécialisation.

7) x_2 est lisse dans l'adhérence de x_1.

8) et 9) On applique le lemme 2.3.1.

- La troisième spécialisation montrera que $\underline{d}_2$ est un pinceau.
- $\underline{d}_2 \cdot \underline{q} = 2$
  On fait dégénérer Q en une droite A et une conique B en alignant P_7, P_8 et P_9, et en spécialisant les autres point sur une conique.
  $\underline{a} = (1; 0^6, 1^3, 0^3)$ et $\underline{b} = (2; 0, 1^5, 0^3, 1, 0^2)$
- $\underline{d}_2 \cdot \underline{a} = 1$ et $\underline{d}_2 \cdot \underline{b} = 1$
- *Dimension de* $\underline{d}_2 - \underline{a} = \underline{d}_3'' = (9; 3^6, 2^3, 4, 0^2)$:
  On exploite B, $\underline{d}_4'' = (7; 3, 2^8, 3, 0^2)$
  On spécialise P_7 sur B et on réexploite B, $\underline{d}_5'' = (5; 3, 1^6, 2^3, 0^2)$
  Enfin on exploite C, $\underline{d}_6'' = (2; 2, 0^6, 1^2, 2, 0^2)$ qui est vide, donc régulier, car P_1, P_8, P_9, P_{10} ne sont pas alignés.
- *Dimension de* $\underline{d}_2 - \underline{b} = \underline{d}_3''' = (8; 3, 2^5, 3^4, 0^2)$:
  On exploite A et on retombe sur $\underline{d}_4''$ qui est vide par ce qui précède.
- *Dimension de* $\underline{d}_2$ *en position spéciale*:
  On fait dégénérer C en une droite R et une conique S
  $\underline{r} = (1; 1, 0^4, 1^2, 0^5)$ et $\underline{s} = (2; 1^5, 0^2, 1^2, 0^3)$
  On exploite S, $\underline{d}_3'''' = (8; 2^5, 3^2, 2^2, 4, 0^2)$
  On sécialise P_{10} sur E la droite P_3, P_7, $\underline{d}_4'''' = (7; 2^2, 1, 2^2, 3, 2^3, 3, 0^2)$
  On sécialise P_2 sur E. B dégénère en deux droites E et F
  $\underline{e} = (1; 0, 1^2, 0^3, 1, 0^2, 1, 0^2)$ et $\underline{f} = (1; 0^3, 1^3, 0^6)$
  On exploite E, $\underline{d}_5'''' = (6; 2, 1, 0, 2^2, 3, 1, 2^3, 0^2)$
  On exploite F, $\underline{d}_6'''' = (5; 2, 1, 0, 1^2, 2, 1, 2^3, 0^2)$
  On spécialise P_{10} sur S et on exploite S, $\underline{d}_7'''' = (3; 1, 0^4, 2, 1^4, 0^2)$
  On exploite R et on obtient $(2; 0^5, 1, 0, 1^3, 0^2)$ et on est en position générique et on sait que le système $\mathcal{L}((2; 0^5, 1, 0, 1^3, 0^2))$ a la dimension attendue 2 par le théorème 3, donc la dimension de $\underline{d}_2$ n'a pas augmenté lors de la spécialisation.

Le lemme 2.3.1 s'applique donc et nous dit que les hypothèse 8) et 9) sont vérifiées.

10) $\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2 = 3$ donc par le lemme 2.3.3, la courbe générique $\mathcal{D}(\underline{d}_2)$ est lisse.

4.1.3 Troisième spécialisation et suivantes

On a déja démontré la lissité de notre courbe de départ, donc dorénavant il suffit de vérifier les six premières hypothèses du lemme d'Horace. On ne va plus exploiter que des courbes de genre nul, et on va s'arranger pour avoir (presque) chaque fois $a = 0$. A chaque étape, il suffira donc de vérifier que a est bien égal à 0 et que la courbe exploitée n'est pas effective dans la position précédente.

On commence par rajouter un point libre dans le plan. On a alors $\underline{\mathrm{d}}_2 = (10; 3^9, 4, 0^2, 1)$ avec $\chi(\underline{\mathrm{d}}_2) = 1$.

On spécialise P_{13} sur C et on exploite C qui devient non effective en position x_2.
$\underline{\mathrm{d}}_3 = (7; 1, 2^8, 4, 0^3)$.

On spécialise P_{10} sur E, la droite P_3, P_7. E est non effective en position x_3.
$\underline{\mathrm{d}}_4 = (6; 1, 2, 1, 2^3, 1, 2^2, 3, 0^3)$.

On sécialise P_9 sur E. Q dégénère en une conique G et la droite E
$\underline{\mathrm{e}} = (1; 0^2, 1, 0^3, 1, 0, 1^2, 0^3)$ et $\underline{\mathrm{g}} = (2; 0, 1, 0, 1^3, 0, 1, 0, 1, 0^3)$.
On exploite G qui est non effective en position x_4.
$\underline{\mathrm{d}}_5 = (4; 1^8, 2^2, 0^3)$.

On veut maintenant exploiter E sans spécialiser. Pour vérifier l'hypothèse 5), il faut donc que a soit non nul. Or, $\underline{\mathrm{d}}_5 \cdot \underline{\mathrm{e}} = -2$ donc $a = 1$.
Pour 3), P_3 et P_7 conviennent.
Pour 4), $\underline{\mathrm{d}}_6 = (3; 1^2, 0, 1^3, 0, 1^3, 0^3)$ et $\underline{\mathrm{d}}_6 \cdot \underline{\mathrm{e}} = 1$. Or $\mathcal{D}(\underline{\mathrm{d}}_6 - P_3^E - P_7^E)$ et E ont deux intersections P_3^E et P_7^E dans le plan éclaté, donc E est une composante fixe du système. En soustrayant E, on obtient $(2; 1^2, 0, 1^3, 0, 1, 0^5)$. Les points sont en position générique donc le système associé est bien vide par le théorème 3.

La dimension attendue de $\underline{\mathrm{d}}_6$ est 2. On spécialise P_9 sur G et on exploite G qui est non effective en position x_6.
$\underline{\mathrm{d}}_7 = (1; 1, 0^{12})$. Les points sont en position générique, donc par le théorème 1, $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_7)$ est non spécial et la courbe générique du système est irréductible.

Conclusion:
Le système $\mathcal{L}((16; 5^{10}))$ est non spécial et sa courbe générique est irréductible et lisse.

4.2 La courbe n.27

$\underline{\mathrm{d}} = (15; 5^8, 3, 2^3)$, et $\chi(\underline{\mathrm{d}}) = 1$

4.2.1 Première sécialisation

On exploite la cubique C qui passe par $P_1, \ldots, P_9$ où on a spécialisé P_{10}, $\underline{\mathrm{c}} = (3; 1^{10}, 0^2)$.
On a $a = 0$. Les hypothèses 1), 2), 3), 5), et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une deuxième spécialisation avec $\underline{\mathrm{d}}_1 = (12; 4^8, 2, 1, 2^2)$.

Pour 8) et 9), $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{c}} = 1$ et C n'est pas une composante fixe de D_1. En effet, $\underline{\mathrm{d}}_1 - \underline{\mathrm{c}} = (9; 3^8, 1, 0, 2^2)$, en position générique. Par le théorème 2, le système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - \underline{\mathrm{c}})$ a la dimension attendue. Cette dimension étant strictement inférieure à celle de $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1)$, on en déduit que C

n'est pas composante de D_1. On peut donc appliquer le lemme 2.3.2.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 3$.

4.2.2 Spécialisations suivantes

On s'arrange à chaque fois pour avoir $a = 0$.

On exploite la conique Q passant par $P_1, \dots, P_5$ où on spécialise P_{10}, P_{11}, et P_{12}.
$\underline{q} = (2; 1^5, 0^4, 1^3)$ et $\underline{d}_2 = (10; 3^5, 4^3, 2, 0, 1^2)$

On spécialise P_{12} sur C et on exploite.
$\underline{c} = (3; 1^9, 0^2, 1)$ et $\underline{d}_3 = (7; 2^5, 3^3, 1, 0, 1, 0)$

On spécialise P_{11} sur C et on exploite.
$\underline{c} = (3; 1^9, 0, 1, 0)$ et $\underline{d}_4 = (4; 1^5, 2^3, 0^4)$. On est en position générique. Par les transformations de Cremona, ce système est équivalent à celui d'une droite passant par 2 points simple. On sait que ce système est régulier et que sa courbe générique est irréductible.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((15; 5^8, 3, 2^3))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.3 La courbe n.26

$\underline{d} = (15; 5^7, 4^2, 3, 2)$ et $\chi = 2$

4.3.1 Première spécialisation

On exploite la cubique C qui passe par $P_1, \dots, P_9$ où on a spécialisé P_{11}, $\underline{c} = (3; 1^9, 0, 1)$. On a $a = 0$. Les hypothèses 1), 2), 3), 5), et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une deuxième spécialisation avec $\underline{d}_1 = (12; 4^7, 3^3, 1)$

Pour 8) et 9), $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$ et C n'est pas une composante fixe de D_1. En effet, $\underline{d}_1 - \underline{c} = (9; 3^7, 2^2, 3, 0)$, en position générique. Par le théorème 2, le système $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - \underline{c})$ a la dimension attendue. Cette dimension étant strictement inférieure à celle de $\mathcal{L}(\underline{d}_1)$, on en déduit que C n'est pas composante de D_1. On peut donc appliquer le lemme 2.3.2.

Pour 10), on a $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 4$. Mais comme $\chi(\underline{d}_1) = 2$, on peut imposer à D_1 de passer par un point simple générique supplémentaire sans changer ses propriétés. On a alors $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 3$ et on peut appliquer le lemme 2.3.3.

4.3.2 Deuxième spécialisation

On ajoute un point générique P_{12} que l'on spécialise sur C. On exploite C, et on obtient $\underline{d}_2 = (9; 3^7, 2^2, 3, 0^2)$, qui est de genre 2 et de dimension attendue 2 et les points sont en position générique. Donc par le théorème 1, $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ est régulier et sa courbe générique est irréductible.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((15; 5^7, 4^2, 3, 2))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.4 La courbe n.25

$\underline{d} = (15; 5^5, 4^6)$ et $\chi = 1$

4.4.1 Première spécialisation

On exploite la cubique C passant par $P_1, \ldots, P_9$ et où ona sécialisé P_{10}, $\underline{c} = (3; 1^{10}, 0)$. On a $a = 0$. Les hypothèses 1), 2), 3), 5), et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une deuxième spécialisation avec $\underline{d}_1 = (12; 4^5, 3^5, 4)$

Pour 8) et 9), on essaye d'appliquer le lemme 2.3.2. On a $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$. Montrons que C n'est pas une composante fixe de D_1.
$\underline{d}_1 - \underline{c} = \underline{d}'_2 = (9; 3^5, 2^5, 4)$. On exploite la conique Q passant par $P_1, \ldots, P_5$ où on spécialise P_{11}. $\underline{d}'_3 = (7; 2^{10}, 3)$
On spécialise P_{10} sur Q et on exploite. $\underline{d}'_4 = (5; 1^5, 2^4, 1, 3)$.
On aligne P_6, P_{10} et P_{11}. $\underline{d}'_5 = (4; 1^6, 2^3, 0, 2)$
On spécialise P_7 sur Q et on exploite. $\underline{d}'_6 = (2; 0^5, 1^2, 2^2, 0, 1)$. Le système associé est vide car les points ne sopnt pas alignés.
Donc C n'est pas composante de D_1, et le lemme 2.3.2 s'applique.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 3$.

4.4.2 Spécialisations suivantes

On exploite la conique A qui passe par $P_1, \ldots, P_3$, P_8 et P_{11} sur laquelle on sécialise P_9 et P_{10}, $\underline{a} = (2; 1^3, 0^4, 1^4)$
$\underline{d}_2 = (10; 3^3, 4^2, 3^2, 2^3, 3)$

On spécialise P_6 sur la droite L joignant P_4 et P_5, et on exploite.
$\underline{l} = (1; 0^3, 1^3, 0^5)$ et $\underline{d}_3 = (9; 3^5, 2, 3, 2^3, 3)$

On fait dégénérer C en une conique R et une droite S
$\underline{r} = (2; 1^2, 0, 1, 0, 1^2, 0)$ et $\underline{s} = (1; 0^2, 1, 0^2, 1, 0, 1, 0^3)$
On exploite R, et on obtient $\underline{d}_4 = (7; 2^2, 3, 2^5, 1^2, 3)$

On aligne P_3, P_5, et P_{11} sur une droite M.
$\underline{m} = (1; 0^2, 1, 0, 1, 0^5, 1)$ et $\underline{d}_5 = (6; 2^4, 1, 2^3, 1^2, 2)$

On spécialise P_7 sur M et on exploite. $\underline{d}_6 = (5; 2^2, 1, 2, 0, 2, 1, 2, 1^3)$

On spécialise P_6 sur la droite N qui joint P_1 et P_2.
$\underline{n} = (1; 1^2, 0^3, 1, 0^5)$ et $\underline{d}_7 = (4; 1^3, 2, 0, 1^2, 2, 1^3)$

On spécialise P_4 sur la droite T qui joint P_1 et P_8.
$\underline{t} = (1; 1, 0^2, 1, 0^3, 1, 0^3)$ et $\underline{d}_8 = (3; 0, 1^3, 0, 1^6)$

Enfin on spécialise P_4 sur A.
$\underline{d}_9 = (1; 0^5, 1^2, 0^4)$ et le système associé est régulier et la courbe générique irréductible.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((15; 5^5, 4^6))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.5 La courbe n.23

$\underline{d} = (13; 5, 4^8, 2^3)$ et $\chi = 1$

4.5.1 Première spécialisation

Soit C la conique passant par $P_2, \ldots, P_6$ où on spécialise P_7 et P_8. $\underline{c} = (2; 0, 1^7, 0^4)$
On a $a = 1$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10), on fait une deuxième spécialisation.

Pour l'hypothèse 4), il faut trouver la dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - P_7^C - P_8^C)$, avec $\underline{d}_1 = (11; 5, 3^7, 4, 2^3)$. Comme $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$, C est une composante fixe du système $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - P_7^C - P_8^C)$ et on peut donc la soustraire. On obtient $\underline{d}_2' = (9; 5, 3^7, 4, 2^3)$.
On exploite la cubique Q passant par P_1, $P_3, \ldots P_6$, $P_9, \ldots, P_{12}$, et où on a spécialisè P_7 et P_8. $\underline{q} = (3, 1, 0, 1^{10})$ et $\underline{d}_3' = (6; 4, 2, 1^6, 3, 1^3)$.
On spécialise P_{10} sur la droite P_1, P_2. $\underline{d}_4' = (5; 3, 1^7, 3, 0, 1^2)$.
On exploite la droite L qui joint P_1 et P_9. $\underline{d}_5' = (4; 2, 1^7, 2, 0, 1^2)$.
On spécialise P_6 sur L et on obtient $\underline{d}_6' = (3; 1^5, 0, 1^3, 0, 1^2)$
On spécialise P_7sur L et on obtient $\underline{d}_7' = (2; 0, 1^4, 0^2, 1, 0^2, 1^2)$. On est en position générique, donc le système associé est vide, donc régulier.

Pour 8) et 9), on a vu que $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$ et que C n'est aps composante du système $\mathcal{L}(\underline{d}_1)$, donc on peut appliquer le lemme 2.3.2.

4.5.2 Deuxième spécialisation

$\underline{d}_1 = (11; 5, 3^7, 4, 2^3)$ et $\chi = 2$

On exploite la cubique Q passant par P_1, $P_3, \ldots P_6$, $P_9, \ldots, P_{12}$, et où on a spécialisè P_7 et P_8. $\underline{q} = (3; 1, 0, 1^{10})$ et $\underline{d}_2 = (8; 4, 3, 2^6, 3, 1^3)$.

On a $a = 0$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une troisième spécialisation.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2 = 3$.

Pour 8) et 9), applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{d}_2 \cdot \underline{q} = 2$. On fait dégénérer Q en une conique A et une droite B avec $\underline{a} = (2; 1, 0, 1^4, 0^3, 1^3)$ et $\underline{b} = (1; 0^6, 1^3, 0^3)$.
On a $\underline{d}_2 \cdot \underline{a} = bd_2 \cdot \underline{b} = 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{a})$: On exploite successivement B, puis la droite L qui joint P_1 et P_2, puis L où on sécialise P_8, puis la droite P_1, P_7 où on sécialise P_9. On obtient $(2; 0, 1^5, 0^2, 1, 0^3)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{b})$: On exploite A et on se retrouve dans le même cas que pour $\underline{d}_2 - \underline{a}$ après l'exploitation de B.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ *après spécialisation*: On exploite B où on a spécialisé P_{11} et P_{12}; puis la droite P_1, P_2 où on a spécialisé P_{10}; puis à nouveau la droite P_1, P_2 où on a spécialisé P_9; puis on exploite C; enfin on spécialise P_9 sur A et on exploite. On obtient $(1; 1, 0^{11})$ dont le système associé est bien régulier.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.5.3 Spécialisations suivantes

On fait dégénérer Q en une conique R et une droite S.
$\underline{\mathrm{r}} = (2;1,0,1^4,0^2,1^3,0)$ et $\underline{\mathrm{s}} = (1;0^6,1^2,0^3,1)$
On exploite R et on obtient $\underline{\mathrm{d}}_3 = (6;3^2,1^4,2^3,0^2,1)$.

On spécialise P_{12} sur la droite P_1,P_2. On a $\underline{\mathrm{d}}_4 = (5;2^2,1^4,2^3,0^3)$.

On spécialise P_9 sur S. $\underline{\mathrm{d}}_5 = (4;2^2,1^7,0^3)$

On spécialise P_1 sur S. On obtient $\underline{\mathrm{d}}_6 = (3;1,2,1^4,0^6)$ et on est en position générique, donc le système associé est régulier et sa courbe générique est irréductible.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((13;5,4^8,2^3))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.6 La courbe n.21

$\underline{\mathrm{d}} = (13;4^{10},2)$ et $\chi = 2$. On rajoute un point simple et on étudie en fait $\underline{\mathrm{d}} = (13;4^{10},2,1)$ avec $\chi = 1$

4.6.1 Première sécialisation

On exploite la conique C passant par $P_1,\dots,P_5$ et où on spécialise P_6 et P_7. $\underline{\mathrm{s}} = (2;1^7,0^5)$. On a $a=1$ et les hypothèses 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10) on fait une deuxième spécialisation.

Pour l'hypothèse 4), il faut trouver la dimension de $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_6^C - P_7^C)$, avec $\underline{\mathrm{d}}_1 = (11;3^7,4^3,2,1)$. Comme $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{c}} = 1$, C est une composante fixe du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_6^C - P_7^C)$ et on peut donc la soustraire. On obtient $\underline{\mathrm{d}}'_2 = (9;2^7,4^3,2,1)$.
Soit Q la conique $P_5,\dots,P_9$ où on spécialise P_{10} et P_{12}. $\underline{\mathrm{q}} = (2;0^4,1^6,0,1)$ et $\underline{\mathrm{d}}'_3 = (7;2^4,1^3,3^3,2,0)$
On exploite la conique R passant par $P_1,\dots,P_3$, P_8 et P_9, où on spécialise P_{10}. $\underline{\mathrm{r}} = (2,1^3,0^4,1^3,0^2)$ et $\underline{\mathrm{d}}'_4 = (5;1^3,2,1^3,2^4,0)$
On spécialise P_{11} sur Q et on a $\underline{\mathrm{d}}'_5 = (3;1^2,2,0^3,1^4,0)$
On spécialise P_{11} sur R et on a $\underline{\mathrm{d}}'_6 = (1;0^3,2,0^8)$ qui est vide donc régulier.

Pour 8) et 9), on a vu que $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{c}} = 1$ et que C n'est aps composante du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1)$, donc on peut appliquer le lemme 2.3.2.

4.6.2 Deuxième spécialisation

$\underline{\mathrm{d}}_1 = (11;3^7,4^3,2,1)$ et $\chi = 2$

On exploite la cubique Q passant par $P_2,\dots P_{10}$, où on a spécialisè P_{11} et P_{12}. $\underline{\mathrm{q}} = (3;0,1^{11})$ et $\underline{\mathrm{d}}_2 = (8;3,2^6,3^3,1,0)$.

On a $a=0$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une troisième spécialisation.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2 = 3$.

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{d}_2 \cdot \underline{q} = 2$. On fait dégénérer Q en une droite A et une conique B avec $\underline{a} = (1; 0^5, 1^2, 0^2, 1, 0^2)$ et $\underline{b} = (2; 0, 1^4, 0^2, 1^2, 0, 1, 0)$.
On a $\underline{d}_2 \cdot \underline{a} = bd_2 \cdot \underline{b} = 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{a})$: On exploite successivement B, puis A où on sécialise P_8, puis la droite P_1, P_9. On obtient $(3; 2, 1^4, 0^2, 1^3, 0^2)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{b})$: On exploite A et on se retrouve dans le même cas que pour $\underline{d}_2 - \underline{a}$ après l'exploitation de B.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ *après spécialisation*: On commence par rajouter un point simple. Il faut montrer que dans cette position $\chi(\underline{d}_2) = 1$ On exploite la droite P_1, P_8 où on a spécialisé P_9; puis on exploite A où on spécialise P_{11};puis on sécialise P_{13} sur C; enfin réexploite C. On obtient $(2; 0^7, 2^3 0^3)$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.6.3 Spécialisations suivantes

On rajoute un point générique. On a donc $\underline{d} - 2 = (8; 3, 2^6, 3^3, 1, 0, 1)$ et $\chi = 1$.

On fait dégénérer Q en une droite A et une conique B telles que $\underline{a} = (1; 0^5, 1^2, 0^3, 1, 0^2)$ et $\underline{b} = 92; 0, 1^4, 0^2, 1^3, 0^3)$. On exploite B. $\underline{d}_3 = (6; 3, 1^4, 2^5, 1, 0, 1)$

On spécialise P_{10} sur A et on exploite. $\underline{d}_4 = (5; 3, 1^6, 2^2, 1, 0^2, 1)$

On spécialise P_2 sur la droite L joignant P_1 et P_8, $\underline{d}_5 = (4; 2, 0, 1^6, 2, 1, 0^2, 1)$

On spécialise P_{13} sur L, $\underline{d}_6 = (3; 1, 0, 1^8, 0^3)$

On spécialise P_8 sur C. On obtient $\underline{d}_7 = (1; 0^8, 1^2, 0^3)$ dont le système associé est régulier et la courbe générique irréductible.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((13; 4^{10}, 2))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.7 La courbe n.19

$\underline{d} = (12; 4^7, 3^2, 2^2)$ et $\chi = 3$. On rajoute deux points simples, et on étudie en fait $\underline{d} = (12; 4^7, 3^2, 2^2, 1^2)$ avec $\chi = 1$.

4.7.1 Première spécialisation

On exploite la conique C passant par $P_1, \ldots, P_5$ où on spécialise P_8 et P_9. $\underline{c} = (2; 1^5, 0^2, 1^2, 0^4)$. On a $a = 1$ et les hypothèses 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10) on fait une deuxième spécialisation.

Pour l'hypothèse 4), il faut trouver la dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - P_8^C - P_9^C)$, avec $\underline{d}_1 = (10; 3^5, 4^2, 2^4, 1^2)$. Comme $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$, C est une composante fixe du système $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - P_8^C - P_9^C)$ et on peut donc la soustraire. On obtient $\underline{d}'_2 = (8; 2^5, 4^2, 1^2, 2^2, 1^2)$. On exploite la cubique $P_2, \ldots P_{10}$,où on spécialise P_{11}, P_{12}, et P_{13}. $\underline{d}'_3 = (5; 2, 1^4, 3^2, 0^2, 1^2, 0^2)$. On exploite la droite P_6, P_7, $\underline{d}'_4 =$

$(4;2,1^4,2^2,0^2,1^2,0^2)$. On est en position générique, donc le système associé est bien vide car il est équivalent, par une transformation de Cremona, à $(2;1^6)$..

Pour 8) et 9), on a vu que $\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 1$ et que C n'est aps composante du système $\mathcal{L}(\underline{d}_1)$, donc on peut appliquer le lemme 2.3.2.

4.7.2 Deuxième spécialisation

$\underline{d}_1 \;=\; (10;3^5,4^2,2^4,1^2)$ et $\chi = 2$

On exploite la cubique Q passant par $P_1, \ldots P_7$, P_{10}, P_{11}, où on a spécialisè P_8 et P_{13}. $\underline{q} \;=\; (3;1^8,0,1^2,0,1)$ et $\underline{d}_2 \;=\; (7;2^5,3^2,1,2,1^3,0)$.

On a $a = 0$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une troisième spécialisation.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{d}_2 \cdot \underline{d}_2 = 3$.

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{d}_2 \cdot \underline{q} = 2$. On fait dégénérer Q en une droite A et une conique B avec $\underline{a} \;=\; (1;0^3,1^2,0^4,1^2,0^2)$ et $\underline{b} \;=\; (2;1^3,0^2,1^3,0^5)$.
On a $\underline{d}_2 \cdot \underline{a} \;=\; bd_2 \cdot \underline{b} \;=\; 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{a})$: On exploite successivement B, puis ǹouveau B où on sécialise P_9. On obtient $(2;0^3,1^4,0,10^2,1,0)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{b})$: On exploite A et on se retrouve dans le même cas que pour $\underline{d}_2 - \underline{a}$ après l'exploitation de B.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ *après spécialisation*: On exploite B où on a spécialisé P_{10} et P_{11}; puis on exploite C où on spécialise P_6. On obtient $(3;0^3,1^3,2,0,1,0^2,1,0)$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.7.3 Spécialisations suivantes

On rajoute un point générique. On a donc $\underline{d} - 2 \;=\; (7;2^5,3^2,1,2,1^3,0,1)$ et $\chi = 1$.

on fait dégénérer Q comme au paragraphe précédent, et on fait les mêmes spécialisations que pour le calcul de la dimension de $\mathcal{L}(d_2)$ en position spéciale. Chaque courbe exploitée était non effective dans la position précédente, et la courbe générique du système final est bien irréductible.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((12;4^7,3^2,2^2))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.8 La courbe n.18

$\underline{d} \;=\; (12;4^6,3^4,2^2)$ et $\chi = 1$.

4.8.1 Première spécialisation

On exploite la conique C passant par $P_1, \ldots, P_5$ où on spécialise P_7 et P_8. $\underline{c} \;=\; (2;1^5,0,1^2,0^4)$. On a $a = 1$ et les hypothèses 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10) on fait une deuxième spécialisation.

Pour l'hypothèse 4), il faut trouver la dimension de $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_7^C - P_8^C)$, avec $\underline{\mathrm{d}}_1 = (10; 3^5, 4, 2^2, 3^2, 2^2)$. Comme $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{c}} = 1$, C est une composante fixe du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_7^C - P_8^C)$ et on peut donc la soustraire. On obtient $\underline{\mathrm{d}}_2' = (8; 2^5, 4, 1^2, 3^2, 2^2)$. On exploite la cubique $P_2, \ldots P_{10}$,où onspécialise P_{11} et P_{12}, $\underline{\mathrm{d}}_3' = (5; 2, 1^4, 3, 0^2, 2^2, 1^2)$. On est en position générique, donc le système associé est bien vide car il est équivalent à $(3; 2, 1^6)$ par une transformation de Cremona.

Pour 8) et 9), on a vu que $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{c}} = 1$ et que C n'est aps composante du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1)$, donc on peut appliquer le lemme 2.3.2.

4.8.2 Deuxième spécialisation

$\underline{\mathrm{d}}_1 = (10; 3^5, 4, 2^2, 3^2, 2^2)$ et $\chi = 2$

On exploite la même cubique Q qu'au paragraphe précédent. $\underline{\mathrm{d}}_2 = (7; 3, 2^4, 3, 1^2, 2^2, 1^2)$.

On a $a = 0$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une troisième spécialisation.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{d}}_2 = 3$.

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{q}} = 2$. On fait dégénérer Q en une droite A et une conique B avec $\underline{\mathrm{a}} = (1; 0^6, 1^2, 0, 1^3)$ et $\underline{\mathrm{b}} = (2; 0, 1^5, 0^2, 1, 0^3)$.
On a $\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{a}} = bd_2 \cdot \underline{\mathrm{b}} = 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{a})$: On exploite successivement B, puis puis la droite P_1, P_9 où on sécialise P_{10}. On obtient $(3; 2, 1^4, 2, 0^6)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{b})$: On exploite A et on se retrouve dans le même cas que pour $\underline{\mathrm{d}}_2 - \underline{\mathrm{a}}$ après l'exploitation de B.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ *après spécialisation*: On exploite B où on a spécialisé P_{10}; puis on exploite A où on spécialise P_9. Enfin on exploite P_1, P_6. On obtient $(3; 2, 1^5, 0^6)$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.8.3 Spécialisations suivantes

On rajoute un point générique. On a donc $\underline{\mathrm{d}} - 2 = (7; 3, 2^4, 3, 1^2, 2^2, 1^3)$ et $\chi = 1$.

On fait dégénérer Q en une droite R et une coniaue S avec $\underline{\mathrm{r}} = (1; 0^6, 1^2, 0^2, 1^2, 0)$ et $\underline{\mathrm{s}} = (2; 0, 1^5, 0^2, 1^2, 0^3)$. On exploite S et on a $\underline{\mathrm{d}}_3 = (5; 3, 1^4, 2, 1^7)$.

On spécialise P_{10} sur la droite P_1, P_6, $\underline{\mathrm{d}}_4 = (4; 2, 1^8, 0, 1^3)$. On est en position générique donc le système associé est régulier et sa courbe générique irréductible.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((12; 4^6, 3^4, 2^2))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.9 La courbe n.17

$\underline{\mathrm{d}} = (11; 5, 3^{10})$ et $\chi = 3$. On rajoute un point et on étudie en fait $\underline{\mathrm{d}} = (11; 5, 3^{10}, 1)$ avec $\chi = 2$.

4.9.1 Première spécialisation

On exploite la conique C passant par $P_1, \dots, P_5$ sur laquelle on sécialise P_{10} et P_{11}, $\underline{c} = (2; 1^5, 0^4, 1^2, 0)$. On a $a = 0$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une deuxième spécialisation.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 4$, et $\chi = 2$ donc on peut rajouter un point et avoir $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_1 = 3$.

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{d}_1 \cdot \underline{c} = 2$. On fait dégénérer C en deux droites A et B avec $\underline{a} = (1; 1^2, 0^7, 1, 0^2)$ et $\underline{b} = (1; 0^2, 1^3, 0^5, 1, 0)$.
On a $\underline{d}_1 \cdot \underline{a} = bd_1 \cdot \underline{b} = 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - \underline{a})$: On exploite successivement B où on spécialise P_{10}, puis la conique Q passant par P_1, P_6, P_7, P_8, P_9 ; puis B oú on spécialise P_6 . On obtient $(4; 2, 1, 0^3, 1, 2^3, 0^2, 1)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - \underline{b})$: On exploite A où on spécialise P_{11} ; puis la conique Q qui passe par $P_1, P_6, \dots, P_9$; puis encore Q où on spécialise P_{10} ; puis B où on spécialise P_{12} . On obtient $(2; 1^2, 0^3, 1^4, 0^3)$ en position générique, donc le système associé est bien vide par le théorème 3.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_1)$ *après spécialisation*: On exploite la conique S passant par $P_1, P_5, \dots, P_8$ où on spécialise P_{10} et P_{11}; puis on spécialise P_9 sur S. On obtient $(5; 2^4, 0, 1^3, 2, 0^2, 1))$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier, car il est équivalent, par les transformations de Cremona, à $(3; 1^8)$, auquel on applique le théorème 3.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.9.2 Spécialisations suivantes

On rajoute un point générique. On a donc $\underline{d}_1 = (9; 4, 2^4, 3^4, 2^2, 1^2)$ et $\chi = 1$.

On exploite la cubique Q qui passe par $P_1, \dots, P_9$ où on sécialise P_{10} et P_{12}, $\underline{d}_2 = (6; 3, 1^4, 2^4, 1, 2, 0, 1)$.

On spécialise P_6 et P_7 sur la droite P_{10}, P_{11}, $\underline{d}_3 = (5; 3, 1^6, 2^2, 0, 1, 0, 1)$.

On spécialise P_9 sur la droite P_1, P_{11}, $\underline{d}_4 = (4; 2, 1^6, 2, 1, 0^3, 1)$. On est en position générique donc le système associé est régulier et sa courbe générique irréductible car il est équivalent à $(3; 1^9)$ par les transformations de Cremona.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((11; 5, 3^{10}))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.10 La courbe n.16

$\underline{d} = (11; 4^2, 3^9, 2)$ et $\chi = 1$.

4.10.1 Première spécialisation

On exploite la droite L passant par P_1, P_2 où on spécialise P_{11} et P_{12}. $\underline{\ } = (; 1^2, 0^8, 1^2)$. On a $a = 1$ et les hypothèses 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10) on fait une deuxième spécialisation.

Pour l'hypothèse 4), il faut trouver la dimension de $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_{11}^L - P_{12}^L)$, avec $\underline{\mathrm{d}}_1 = (10; 3^{10}, 2, 1)$. Comme $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{l}} = 1$, C est une composante fixe du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_{11}^L - P_{12}^L)$ et on peut donc la soustraire. On obtient $\underline{\mathrm{d}}_2' = (9; 2^2, 3^8, 1, 0)$. On exploite la cubique $P_2, \ldots P_{10}$,où onspécialise P_{11}, $\underline{\mathrm{d}}_3' = (6; 2, 1, 2^8, 0^2)$. On est en position générique, donc le système associé est bien vide par le théorème 1.

Pour 8) et 9), on a vu que $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{l}} = 1$ et que L n'est pas composante du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1)$, donc on peut appliquer le lemme 2.3.2.

4.10.2 Deuxième spécialisation

$\underline{\mathrm{d}}_1 = (10; 3^{10}, 4, 2, 1)$ et $\chi = 2$

On exploite la cubique Q passant par $P_2, \ldots, P_{10}$ où on sécialise P_{11} et P_{12}. $\underline{\mathrm{d}}_2 = (7; 3, 2^9, 1, 0)$.

On a $a = 0$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une troisième spécialisation.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{d}}_2 = 3$.

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{q}} = 2$. On fait dégénérer Q en une droite A et une conique B avec $\underline{\mathrm{a}} = (1; 0, 1^3, 0^8)$ et $\underline{\mathrm{b}} = (2; 0^4, 1^8)$.
On a $\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{a}} = bd_2 \cdot \underline{\mathrm{b}} = 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{a})$: On exploite successivement B, puis puis la droite A où on sécialise P_9 et P_{10}. On obtient $(3; 3, 0^3, 1^4, 0^4)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{b})$: On exploite A et on se retrouve dans le même cas que pour $\underline{\mathrm{d}}_2 - \underline{\mathrm{a}}$ après l'exploitation de B.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ *après spécialisation*: On exploite B où on a spécialisé P_4; puis on exploite A où on spécialise P_{10}. On obtient $(4; 3, 1^2, 0, 1^5, 0^3)$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier car il est équivalent à $(3; 2, 1^5)$.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.10.3 Spécialisations suivantes

On fait dégénérer Q comme au paragraphe précédent, et on fait les mêmes spécialisations qui étaient toutes non effectives dans la position préceédente. comme la courbe du système final est irréductible, on peut conclure.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((11; 4^2, 3^9, 2))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.11 La courbe n.14

$\underline{\mathrm{d}} = (10; 4, 3^7, 2^4)$ et $\chi = 2$. On rajoute un point simple et on étudie $\underline{\mathrm{d}} = (10; 4, 3^7, 2^4, 1)$ avec $\chi = 1$.

4.11.1 Première spécialisation

On exploite la conique C passant par $P_1, \ldots, P_5$ où on spécialise P_6 et P_7. On a $a = 1$ et les hypothèses 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10) on fait une deuxième spécialisation.

Pour l'hypothèse 4), il faut trouver la dimension de $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_6^C - P_7^C)$, avec $\underline{\mathrm{d}}_1 = (8;3,2^6,3,2^4,1)$. Comme $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{c}} = 1$, C est une composante fixe du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1 - P_6^C - P_7^C)$ et on peut donc la soustraire. On obtient $\underline{\mathrm{d}}_2' = (6;2,1^6,3,2^4,1)$. On exploite la droite P_6, P_7,où onspécialise P_8 et P_9, $\underline{\mathrm{d}}_3' = (5;2,1^4,0^2,2,1,2^3,1)$. On est en position générique, donc le système associé est bien vide car il est équivalent à $(3;1^{10})$ par une transformation de Cremona.

Pour 8) et 9), on a vu que $\underline{\mathrm{d}}_1 \cdot \underline{\mathrm{c}} = 1$ et que C n'est aps composante du système $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1)$, donc on peut appliquer le lemme 2.3.2.

4.11.2 Deuxième spécialisation

$\underline{\mathrm{d}}_1 = (8;3,2^6,3,2^4,1)$ et $\chi = 2$

On exploite cubique Q qui a un point double en P_1, qui passe par $P_2, P_3, P_6, P_7, P_8, P_9$ et où on spécialise P_{10}, P_{11} et P_{12}. $\underline{\mathrm{d}}_2 = (5;1^3,2^2,1^2,2,1^5)$.

On a $a = 0$, et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées. Pour 4) et 6), on fait une troisième spécialisation.

Pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique car $\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{d}}_2 = 3$.

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{q}} = 3$. On fait dégénérer Q en trois droites L, m, et N avec $\underline{\mathrm{l}} = (1;1,0^4,1,0,1,0^5)$, $\underline{\mathrm{m}} = (1;1^2,0^6,1^2,063)$ et $\underline{\mathrm{n}} = (1;0^2,1,0^3,1,0^3,1^2,0)$.
On a $\underline{\mathrm{d}}_2 \cdot \underline{\mathrm{l}} = bd_2 \cdot \underline{\mathrm{m}} = bd_2 \cdot \underline{\mathrm{n}} = 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{l})$: On spécialise P_8 sur N et on exploite; puis on exploite M. On obtient $(2;0^3,2^2,0^7,1)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{m})$: On spécialise P_8 sur C et on exploite. On obtient $(2;0^3,1^2,0^2,1,0^2,1^3)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - \underline{n})$: On spécialise P_{13} sur M et on exploite. On obtient $(3;0^3,2^2,1,0,2,0^5)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ après spécialisation: On exploite N où on a spécialisé P_8; puis on exploite M où on spécialise P_{13}; on exploite la droite Z qui passe par P_4 et P_5. On obtient $(2;0^3,1^3,0,1,0^5)$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.11.3 Spécialisations suivantes

$\underline{\mathrm{d}}_2 = (5;1^3,2^2,1^2,2,1^5)$ et $\chi = 2$.

On spécialise P_8 et P_{12} sur la droite P_7, P_4, $\underline{\mathrm{d}}_3 = (4;1^4,2,1,0,1^4,0,1)$.

On spécialise P_5 et P_{11} sur la droite P_8, P_6, $\underline{\mathrm{d}}_4 = (3;1^5,0^3,1^2,0^2,1)$.On est en position générique donc le système associé est régulier et sa courbe générique irréductible, par le théorème 1.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((10;4,3^7,2^4))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.12 La courbe n.13

Pour cette courbe, voir la deuxième spécialisation de la courbe 16 où cette courbe est étudiée en position spéciale.

4.13 La courbe n.12

$\underline{d} = (9; 5, 2^1 3)$ et $\chi = 1$

4.13.1 Première spécialisation

On exploite la droite L passant par P_1 et P_2, où on spécialise P_3 et P_4. On a $a = 1$, et 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10), on fait une deuxième spécialisation.

Pour 4), on a $\underline{d}_1 \cdot \underline{l} = 1$ donc L est composante de $\mathcal{L}(\underline{d}_1 - P_3^L - P_4^L)$ et $\underline{d}_2' = (7; 3, 0^3, 2^{10})$. On est en position générique, $g = 4$ et $\chi = 0$ donc le théor'eme 1 s'applique.

Pour 8) et 9), on a $\underline{d}_1 \cdot \underline{l} = 1$ et L n'est pas composante de D_1, donc le lemme 2.3.2 s'applique.

4.13.2 Deuxième spécialisation

$\underline{d} - 1 = (8, 4, 1^3, 2^{10}$ et $\chi = 2$

On spécialise P_6 et P_7 sur la droite M joignant $P - 1$ et P_5. On a $a = 1$, et 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10), on fait une troisième spécialisation.

Pour 4) on a $\underline{d}_2 \cdot \underline{m} = 1$ donc M est composante de $\mathcal{L}(\underline{d}_2 - P_6^M - P_7^M)$ et $\underline{d}_2' = (6; 2, 1^3, 0^3, 2^7)$. On spécialise P_{14} sur L, on exploite et on obtient $(5; 1, 0^6, 2^6, 1)$ et on est en position générique, on peut appliquer le théorème 1.

Pour 8) et 9), on a $\underline{d}_1 \cdot \underline{m} = 1$ et M n'est pas composante de D_1, donc le lemme 2.3.2 s'applique.

4.13.3 Troisième spécialisation

On rajoute un point simple, donc on étudie $\underline{d}_2 = (7; 3, 1^6, 2^7, 1)$ avec $\chi = 2$.

On exploite la cubique C passant par P_1,P_3,$P_4, P_6, P_7, P_8, \ldots, P_{11}$ où on spécialise P_{12}, P_{13} et P_{14}. On a $a = 0$ et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées.

La résiduelle est $\underline{d}_3 = (4; 2, 1, 0^2, 1, 0^2, 1^8)$. On est en position générique et on peut appliquer le théorème 1, ce qui nous donne 4), 6) et 10).

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{d}_3 \cdot \underline{c} = 3$. On fait dégénérer C en trois droites A, B, et E avec $\underline{a} = (1; 1, 0^7, 1, 0^6)$, $\underline{b} = (1; 0^8, 1, 0^3, 1^2, 0))$ et $\underline{e} = (1; 0^{10}, 1^3, 0^2)$.
On a $\underline{d}_3 \cdot \underline{a} = bd_3 \cdot \underline{b} = bd_3 \cdot \underline{e} = 1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_3 - \underline{a})$: On spécialise P_9 sur E et on exploite. On obtient $(2; 1^2, 0^2, 1, 0^7, 1^3)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_3 - \underline{b})$: On spécialise P_{15} sur E et on exploite. On obtient $(2; 2, 1, 0^2, 1, 0^4, 1^3, 0^3)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.

Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_3-\underline{e})$: On spécialise P_8 sur B et on exploite. On obtient $(2;2,1,0^2,1,0^4,1,0^4,1)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_3)$ *après spécialisation*: On exploite E où on a spécialisé P_9 et P_{10}. On obtient $(3;2,1,0^2,1,0^7,1^3)$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((9;5,2^{13}))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.14 La courbe n.9

$\underline{\mathrm{d}} \ = \ (9;3^5,2^8)$ et $\chi=1$

4.14.1 Première spécialisation

On exploite la droite L passant par P_1 et P_2, où on spécialise P_3 et P_6. On a $a=1$, et 1), 2), 3), 5), 7) sont vérifiées. Pour 6) et 10), on fait une deuxième spécialisation.

Pour 4), on a $\underline{\mathrm{d}}_1\cdot\underline{\mathrm{l}}=1$ donc L est composante de $\mathcal{L}(\underline{\mathrm{d}}_1-P_3^L-P_6^L)$ et $\underline{\mathrm{d}}'_2 \ = \ (7;1^3,3^2,0,2^7)$. On exploite la conique Q qui passe par P_4,P_5,P_7,P_8,P_9 et où on spécialise P_1 et P_{10}. On réexploite Q enspécialisant P_2 et P_{13} dessus.On obtient $(3;0^2,1^3,0^5,2^2,1)$ On est en position générique, donc le systèm eest bien vide.

Pour 8) et 9), on a $\underline{\mathrm{d}}_1\cdot\underline{\mathrm{l}}=1$ et L n'est pas composante de D_1, donc le lemme 2.3.2 s'applique.

4.14.2 Deuxième spécialisation

$\underline{\mathrm{d}}_1 \ = \ (8;2^3,3^2,1,2^7)$ avec $\chi=2$.

On exploite la cubique C passant par P_4,P_5,$P_7,\ldots,P_{13}$ où on spécialise P_2, P_3. On a $a=0$ et les hypothèses 1), 2), 3), 5) et 7) sont vérifiées.

Pour 4) et 6), on fait une troisième spécialisation, pour 10), le lemme 2.3.3 s'applique.

Pour 8) et 9), on applique le lemme 2.3.1. Vérifions ses hypothèses.
$\underline{\mathrm{d}}_2\cdot\underline{\mathrm{c}}=2$. On fait dégénérer C en une droite A et une conique B avec $\underline{\mathrm{a}} \ = \ (1;0^3,1,0^7,1^2))$ et $\underline{\mathrm{b}} \ = \ (2;0,1^2,0,1,0,1^5,0^2)$.
On a $\underline{\mathrm{d}}_2\cdot\underline{\mathrm{a}} \ = \ bd_2\cdot\underline{\mathrm{b}}=1$.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2-\underline{a})$: On exploite B. On obtient $(2;2;0^2,1^3,0^7)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2-\underline{b})$: On exploite A. On obtient $(2;2;0^2,1^3,0^7)$ en position générique, donc le système associé est bien vide.
Dimension de $\mathcal{L}(\underline{d}_2)$ *après spécialisation*: On exploite B où on a spécialisé P_{12} et P_{13}. On obtient $(3;2,0^2,2,1,0^7,1)$ et on est en position générique donc le système associé est bien régulier.
Le lemme 2.3.1 s'applique donc.

4.14.3 Spécialisations suivantes

On fait dégénérer C de la même facon qu'au paragraphe précédent, et on fait les mêmes exploitations que pour la dimension de $\underline{\mathrm{d}}_2$ en position spéciale. Toutes les courbes exploitées étant non effectives en position précédente, et la courbe finale étant irréductible, on peut conclure.

Conclusion: Le système $\mathcal{L}((9;3^5,2^8))$ est régulier et sa courbe générique est lisse et irréductible.

4.15 La courbe n.6

Pour cette courbe, voir la deuxième spécialisation de la courbe 14 où cette courbe est étudiée en position spéciale.

Références

[1] S. Bossini: *Classification des courbes sur les surfaces rationnelles génériques*, thèse, juin 1994.

[2] T. Mignon: *Courbes lisses sur des surfaces rationnelles génériques, un lemme d'Horace différentiel*, novembre 1998.

[3] T. Mignon: *Systèmes linéaires de courbes planes*, thèse, novembre 1997.

[4] R. Miranda: *Linear systems of plane curves*, Notices of the AMS, volume 46, number 2.

[5] J.F. Quint: *Courbes planes à singularités imposées*, rapport de stage de magistère, juillet 1996.