

Nom et Prénom:

Exo 5.1. Soit \mathcal{B}_3 la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}_4 celle de \mathbb{R}^4 .

1. Expliciter l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par les images des vecteurs de la base \mathcal{B}_3 :

$$f(1, 0, 0) = (5, -8, -1, 3), \quad f(0, 1, 0) = (2, -3, -2, -1), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 2, -3, -5).$$

2. Préciser la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3)$.

3. Déterminer une base de l'image de f . L'application f , est-elle surjective ?

4. Soit F le sous-espace de \mathbb{R}^3 d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Déterminer une base du sous-espace vectoriel $f(F)$.

5. L'application f , est-elle injective ? Sinon préciser $\ker f$ (i. e. donner une base de $\ker f$).

6. Notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base \mathcal{B}_3 . Montrer que $\mathcal{B}' = (e_3, e_2, e_3 - 2e_2 + e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Montrer qu'il existe une base \mathcal{B}'' de \mathbb{R}^4 de sorte que

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'', \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)) = x_1 f(1, 0, 0) + x_2 f(0, 1, 0) + x_3 f(0, 0, 1) = \dots$$

2. Soit $\mathcal{B}_4 = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ et $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$. On écrit $f(e_i)$ comme combinaison linéaire des b_i (ce qui revient à résoudre un système linéaire - ici bien simple):

$$f(e_1) = (5, -8, -1, 3) = 5b_1 + (-8)b_2 + (-1)b_3 + 3(b_4)$$

Les coefficients de cette combinaison lin. donnent la première colonne de la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3)$. Pareil pour e_2, e_3 .

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -8 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

3. On a $\text{im } f = f(\mathbb{R}^3) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle$. On utilise l'algorithme d'échelonnage pour obtenir une base à partir de ces trois vecteurs. On obtient $\dim(\text{im } f) = 2$. Alors $\text{im } f \neq \mathbb{R}^4$, l'application f n'est pas surjective.

4. On trouve une base $(u = (1, 0, -1), v = (1, -1, 0))$ de $H = (x_1 + x_2 + x_3 = 0)$ en utilisant l'algorithme du cours. On a que $f(H) = \langle f(u), f(v) \rangle$. Echelonner ce système de générateurs donne une base.

5. On a $\dim(\ker f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{im } f) = 3 - 2 = 1$, donc f n'est pas injective. Une façon d'obtenir un vecteur $w \neq 0$ qui peut servir comme base de $\ker f$ est de résoudre le système lin. $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ (avec 4 équations), mais il y en a d'autres (c.f. TD).

6. Appelons $w = e_3 - 2e_2 + e_1$. On suppose d'abord avoir $\lambda_3, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_3 e_3 + \lambda_2 e_2 + \lambda w = 0$. On peut en déduire que

$$0 = \lambda_3 e_3 + \lambda_2 e_2 + \lambda(e_3 - 2e_2 + e_1) = \lambda e_1 + (\lambda_2 - 2\lambda)e_2 + (\lambda + \lambda_3)e_3 = 0$$

et alors, car (e_1, e_2, e_3) est une base, les coeffs de cette comb. lin. sont tous zéro:

$$\lambda = (\lambda_2 - 2\lambda) = (\lambda + \lambda_3) = 0$$

et alors

$$\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille $(e_3, e_2, w) = \mathcal{B}'$ est donc libre, et ainsi une base de \mathbb{R}^3 .

L'exo précédent nous dit que $w = (1, -2, 1) = e_3 - 2e_2 + e_1 \in \ker f$.

Comme base \mathcal{B}'' on pourrait choisir $\mathcal{B}'' = (f(e_3), f(e_2), b_3, b_4)$. Cette famille est effectivement libre (à vérifier) et ainsi une base de \mathbb{R}^4 .

La première colonne de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$ se calcule alors comme des coeffs de la combinaison linéaire par rapport à \mathcal{B}'' de l'image du premier vecteur de \mathcal{B}' , le vecteur e_3 ,

$$f(e_3) = 1f(e_3) + 0f(e_2) + 0b_3 + 0b_4$$

et pareil pour le reste.

Quels choix étaient obligés pour que ça marche, quels étaient arbitraires ?

Pour que la première colonne ait la forme $(1, 0, 0, 0)$, il faut choisir $f(e_1)$ comme premier vecteur de la base \mathcal{B}'' . Pareil pour la deuxième colonne. Après il faut compléter cette famille de deux vecteurs pour obtenir une base de \mathbb{R}^4 . Les vecteurs peuvent être choisis avec la restriction qu'il faut bien obtenir une famille libre.