

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2011-2012

FILIÈRE : ÉCONOMIE-GESTION

ANNÉE D'ÉTUDE : L2S3

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES

CONTROLE 2

Exercice 1 (6pts):On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 3^n$$

et la condition initiale $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 directement partir de la relation de récurrence.

$$u_1 = 2u_0 - 3^0 = 2 - 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 - 3^1 = 2 - 3 = -1$$

$$u_3 = 2u_2 - 3^2 = -2 - 9 = -11$$

2. Calculer le terme général de la suite et vérifier le calcul avec les résultats de question 1.
Le terme général est, d'après la formule du cours,

$$u_n = 2^n \left(1 - \frac{-1}{3-2} \right) + \frac{-1}{3-2} 3^n = 2 \cdot 2^n - 3^n = 2^{n+1} - 3^n .$$

3. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) .

$$u_n = 2 \cdot 2^n - 3^n = 3^n \underbrace{\left(2 \underbrace{\left(\frac{2}{3} \right)^n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} - 1 \right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

Exercice 2 (6pts):

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} .$$

On a $\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$$

2. Calculer les parties réelles et imaginaires du nombre complexe

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} .$$

$$z_2 = 1 + 0i = 1$$

Exercice 3 (8pts):

Résoudre le système linéaire (S) . Indiquer à chaque étape les transformations effectuées. Donner l'ensemble des solutions sous forme de combinaison linéaire de vecteurs constants.

$$(S) \begin{cases} -2x + 4y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ -x + 7y + 3z = 3 \end{cases}$$

On trouve, comme solutions, les points de la forme $(\frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{2}, z)$.

L'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ z \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

On peut aussi multiplier le vecteur qui détermine la direction — c'est que sa direction qui nous intéresse, pas son longueur:

$$S = \{ z(-1, -1, 2) + (1/2, 1/2, 0) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

Par contre, il ne faut pas modifier le vecteur constant $(1/2, 1/2, 0)$ qui donne le décalage par rapport à l'origine.