ISEM **Université de Nice Sophia Antipolis**

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2011-2012
FILIÈRE : ÉCONOMIE-GESTION
ANNÉE D'ÉTUDE : L2 S3
MATIÈRE : MATHÉMATIQUES

Fiche TD 5

Exercice 1 :

Dans les quatres cas suivants, dire si les produits matriciels $A \cdot B$ et $B \cdot A$ sont bien définis. Dans les cas où le produit est bien défini, le calculer.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \ ;$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2+i \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \ ; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Dans le cas où le produit $A \cdot B$ et le produit $B \cdot A$ sont tous les deux bien définis, a-t-on $A \cdot B = B \cdot A$?

$$A_1 \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 \cdot A_1 = \lightning$$

$$A_2 \cdot B_2 = \lightning \qquad B_2 \cdot A_2 = \lightning$$

$$A_3 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 2i+8 & -i-5 \\ 1-3i & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} i+4 & 3i+3 \\ 3i+4 & i+5 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \cdot B_4 = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 7 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_4 \cdot A_4 = \lightning$$

Exercice 2 :

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et le système linéaire écrit sous forme matricielle $A\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B}$ à l'inconnue $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et où $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ est un second membre arbitraire.

1. Résoudre ce système.
   Il y a une solution unique,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_2 + b_1}{2} \\ \dfrac{-4b_3 + 3b_2 + 5b_1}{6} \\ -\dfrac{-2b_3 + 3b_2 + b_1}{6} \end{pmatrix}$$

2. La matrice A est-elle inversible? Si oui, donner son inverse A^{-1}.
   D'après le cours, la matrice A est inversible, et son inverse A^{-1} est la matrice qui verifie

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Autrement dit, pour A^{-1} on sait

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_2 + b_1}{2} \\ \dfrac{-4b_3 + 3b_2 + 5b_1}{6} \\ -\dfrac{-2b_3 + 3b_2 + b_1}{6} \end{pmatrix} \quad .$$

Cela permet de "lire" simplement les coefficients de la matrice A^{-1} dans le vecteur a droite. On a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5/6 & 1/2 & -2/3 \\ -1/6 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les produits $A \cdot A^{-1}$ et $A^{-1} \cdot A$. Quel résultat doit-on trouver?

On doit trouver

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Faites les deux calculs pour vous entrainer.

Remarque: un exemple a aussi été fait en cours, dans le paragraphe **Lien entre Résolution des Systèmes carrées et matrices inversibles**.

Exercice 3 :

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible? Si oui, donner son inverse.

Toutes les matrices diagonales sont inversibles, et l'inverse d'une matrice diagonale est une matrice diagonale avec les composantes inversées sur le diagonale.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : On considère $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On considérera pour cela le système $A\overrightarrow{C} = \overrightarrow{X}$ à l'inconnue $\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et au second membre $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Ici la matrice A est la matrice dont les colonnes sont données par $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$.

Il faut verifier que le système $A\overrightarrow{C} = \overrightarrow{X}$ admet une solution unique

$$\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad ,$$

ce qui est la meme chose que de dire que $\overrightarrow{X}$ s'écrit comme combinaison linéaire avec des scalaires c_1, c_2 et c_3 uniques

$$\overrightarrow{X} = c_1\overrightarrow{u_1} + c_2\overrightarrow{u_2} + c_3\overrightarrow{u_3} \quad ,$$

c'est-a-dire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore, écrit sous forme de système linéaire,

$$\left\{ \begin{array}{cccl} & c_2 & +2c_3 & = x_1 \\ c_1 & +c_2 & +2c_3 & = x_2 \\ c_1 & -c_2 & & = x_3 \end{array} \right.$$

$$\big[L_1 \longleftrightarrow L_3\big] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} c_1 & -c_2 & & = x_3 \\ c_1 & +c_2 & +2c_3 & = x_2 \\ & c_2 & +2c_3 & = x_1 \end{array} \right.$$

$$\big[L_2 := L_2 - L_1\big] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccl} c_1 & -c_2 & & = & x_3 \\ & 2c_2 & +2c_3 & = & x_2 - x_3 \\ & c_2 & +2c_3 & = & x_1 \end{array} \right.$$

$$\big[L_3 := 2L_3 - L_2\big] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccl} c_1 & -c_2 & & = & x_3 \\ & 2c_2 & +2c_3 & = & x_2 - x_3 \\ & & 2c_3 & = & 2x_1 - (x_2 - x_3) \end{array} \right.$$

Ce système admet une solution unique; en remontant, on trouve successivement c_3, c_2 et c_1:

$$(L_3) \qquad c_3 = \frac{2x_1 - x_2 + x_3}{2}$$

$$(L_2) \qquad 2c_2 + 2x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - x_3$$

$$(L_2') \qquad c_2 = -x_1 + x_2 - x_3$$

$$(L_1) \qquad c_1 - (-x_1 + x_2 - x_3) = x_3$$

$$(L_1') \qquad c_1 = -x_1 + x_2$$

La solution est donc (on écrit en ligne, pour mieux utiliser l'espace):

$$(c_1, c_2, c_3) = \left(x_2 - x_1, -x_1 + x_2 - x_3, \frac{2x_1 - x_2 + x_3}{2} \right)$$

Remarque: au lieu de $L_1 \longleftrightarrow L_3$ on aurait pu faire $L_1 \longleftrightarrow L_2$ comme premier étape. Après on aurait eu des transformations différentes, mais le resultat doit être le même.

2. Donner les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ d'un vecteur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Les coordonnées correspondent exactement aux réels c_1, c_2 et c_3 qu'on a trouvé en haut.

Exercice 5 : On considère le système

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce système: donner une base de l'ensemble des solutions et sa dimension. On justifiera avec soin la réponse.

On a

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \left(\frac{y-z}{2}, y, z \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{ y(1/2, 1, 0) + z(-1/2, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Donc une base de l'ensemble des solutions est p. ex. donnée par

$$\mathcal{B} = \{(1/2, 1, 0), (-1/2, 0, 1)\}$$

et vu que $\mathcal{B}$ a deux elements, on a donc que la dimension est 2.