NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 4
Modèle de Leslie

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On considère une population d'oiseaux dont le cycle de reproduction comporte 3 étapes, *oeufs*, *oisillons* (juveniles) et *oiseaux* (adultes). Si l'on désigne respectivement par o_t, j_t et a_t les effectifs à l'instant t de ces trois classes, on suppose que l'on a :

$$\begin{cases} o_{t+1} &= 6j_t + 10a_t \\ j_{t+1} &= 0,5o_t \\ a_{t+1} &= 0,4j_t \end{cases} \tag{1}$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle et indiquer le sens des 4 coefficients 6, 10, 0,5 et 0,4.

- Sous forme matricielle, le système (1) s'écrit : $\begin{pmatrix} o_{t+1} \\ j_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o_t \\ j_t \\ a_t \end{pmatrix}$
- 6 et 10 sont les coef. de fertilité de la pop. des juveniles et de celle des adultes respectivement.
- 0,5 et 0,4 sont les coef. de survie entre oeufs et oisillons d'une part et entre oisillons et oiseaux d'autre part.

2. Les formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes, (o_0, j_0, a_0), de calculer les effectifs (o_1, j_1, a_1) à l'instant suivant $t = 1$, puis, (o_2, j_2, a_2) à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Si $(o_0, j_0, a_0) = (30, 50, 50)$, on obtient :

t	0	1	2	3	4	5	6
o_t	30	600	290	2460	2470	7960	12330
j_t	50	15	400	145	1230	1235	3980
a_t	50	20	6	160	58	492	494

Compléter les valeurs manquantes du tableau en expliquant vos calculs.

- Calcul de o_1 : $o_1 = 6j_0 + 10a_0 = 6(50) + 10(30) = 600$
- Calcul de a_2 : $a_2 = 0,4j_1 = (0,4)(15) = 6$
- Calcul de j_3 : $j_3 = 0,5o_2 = (0,5)(290) = 145$

3. Si l'on désigne par $N_t = o_t + j_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant t (et donc N_0 l'effectif initial), on peut également calculer à partir de (??) les termes successifs de la suite (N_t), ce qui permet d'apréhender aussi la dynamique de cette population dans son ensemble. On a ici :

t	0	1	2	3	4	5	6
N_t	130	635	696	2765	3758	9687	16804

Calculer les coefficients manquant de ce tableau en expliquant vos calculs. Que constatez-vous concernant l'évolution de cette population ?

Calcul de N_1 : $N_1 = o_1 + j_1 + a_1 = 600 + 15 + 20 = 635$
Calcul de N_5 : $N_5 = o_5 + j_5 + a_5 = 7960 + 1235 + 492 = 9687$
On constate que la population augmente fortement avec le temps : on observe qu'elle double presque entre $t=5$ et $t=6$ ce qui fait penser à une croissance exponentielle.

Exercice 2. : Considérons une population de saumons, en limitant nos observations aux seules femelles. Supposons qu'elles vivent au maximum 3 ans, avec un taux de survie de 53% la première année et 22% la seconde. Enfin supposons que chaque femelle donne naissance à 4 femelles au cours de sa deuxième année et à 5 femelles au cours de sa deuxième année. Ecrire le système dynamique modélisant l'évolution de cette population de saumons.

Si l'on désigne par x_t^1, x_t^2 et x_t^3 les effectifs des 3 classes d'age à l'instant t, la dynamique de cette population est :

$$\begin{cases} x_{t+1}^1 = 4\,x_t^2 + 5\,x_t^3 \\ x_{t+1}^2 = 0{,}53\,x_t^1 \\ x_{t+1}^3 = 0{,}22\,x_t^2 \end{cases}$$

Si l'on suppose que la population initiale comporte 12 femelles dans chaque classe d'age, combien y en aura-t-il de chaque classe l'année suivante ? Combien l'année d'après ?

Si $\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$, on aura en $t=1$ $\begin{cases} x_1^1 = 4(12)+5(12) = 108 \\ x_1^2 = (0{,}53)(12) = 6{,}36 \\ x_1^3 = (0{,}22)(12) = 2{,}64 \end{cases}$

et en $t=2$ $\begin{cases} x_2^1 = 4(6{,}36)+5(2{,}64) = 38{,}64 \\ x_2^2 = (0{,}53)(108) = 57{,}24 \\ x_2^3 = (0{,}22)(6{,}36) = 1{,}3992 \end{cases}$

Indiquer quelle est la matrice de Leslie L de ce système. Est-ce une matrice positive ? Une matrice stochastique ? Une matrice primitive ?

La matrice de Leslie du système est $L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0{,}53 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}22 & 0 \end{pmatrix}$

- C'est une matrice positive (tous ses coef. sont positifs ou nuls)
- Elle n'est pas stochastique (certains coef. sont supérieurs à 1 et la somme des lignes n'est pas égale à 1)
- On ne sait pas si elle est primitive (il faudrait calculer ses puissances et voir si l'une d'elles est sans zero)

Ayant vérifié que cette matrice est primitive, on a calculé sa valeur propre dominante et un vecteur propre associé : on a trouvé $\lambda = 1,5778$ et $V = (\ 0,947 \quad 0,318 \quad 0,044\ )$. Que peut-on en déduire sur la dynamique de ce modèle de Leslie ? En particulier, quelle sera, selon ce modèle, la répartition entre les différente classes d'ages après un temps long ?

On peut déduire qu'à long terme, la croissance de la population de saumons sera exponentielle (ou Malthusienne) de la forme $N_{t+1} = (1{,}5778)N_t$.

La répartition asymptotique des differentes classes d'age sera égale à $\left(\frac{0{,}947}{1{,}309}; \frac{0{,}318}{1{,}309}\ \frac{0{,}044}{1{,}309}\right)$ où $1{,}309 = 0{,}947+0{,}318+0{,}044$.

$= (0{,}7234 \quad 0{,}2429 \quad 0{,}0336)$ donc 72,3%, 24,3% et 3,4% environs.