

Cours 2 : Résolution de systèmes différentiels

Avec le modèle de Lotka-Volterra (ou *modèle proies-prédateurs*), nous avons étudié un exemple de système différentiel et nous en verrons d'autres exemples plus loin. Ce type de système modélise la dynamique de deux quantités (par exemple les effectifs de deux populations) qui évoluent avec le temps, non pas de façon indépendantes l'une de l'autre, mais en interaction. Un tel système s'écrit plus généralement

$$\begin{cases} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

où f et g sont deux fonctions. Dans la suite, nous allons voir comment l'on peut *résoudre* un tel système, c'est-à-dire en calculer les solutions exactes lorsqu'on le peut (mais c'est rarement possible) ou, à défaut, comment l'on peut décrire le comportement des solutions par une *étude qualitative*.

1 Qu'est-ce qu'une solution ?

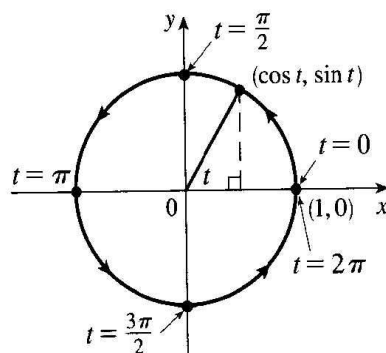
Une solution du système (1) est un vecteur dont les deux coordonnées sont des fonctions du temps $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ qui *vérifient* le système différentiel, c'est-à-dire telles que l'on a $\begin{pmatrix} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$. Par exemple pour le système différentiel suivant, appelé *oscillateur harmonique*,

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x \end{cases} \quad (2)$$

on peut vérifier que, pour toutes les valeurs de $r \geq 0$, le vecteur $(x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t)$ est une solution du système.

La *condition initiale* est la valeur de la solution à l'instant initial (que l'on choisit souvent égal à 0), c'est-à-dire le vecteur $(x(0), y(0))$.

On peut représenter géométriquement les solutions du système différentiel de deux façons différentes (comme sur la figure du Cours 1) : soit on trace les graphes de deux composantes de la solution comme des fonctions du temps, soit on trace la courbe image de $t \rightarrow (x(t), y(t))$ que l'on appelle une courbe paramétrée dans le plan (x, y) . Une *courbe paramétrée* du plan est une fonction qui à chaque instant t associe un point du plan de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$. On peut donc voir une telle courbe comme la trajectoire d'un point mobile qui se déplace dans le plan au cours du temps. Par exemple la figure suivante montre la courbe $t \rightarrow (\sin(t), \cos(t))$ qui n'est autre que le cercle unité puisque l'on a $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$.



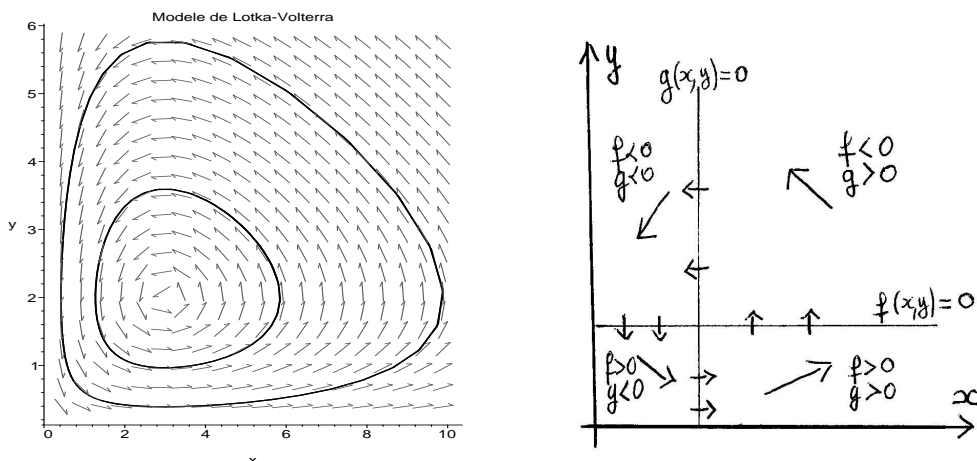
La vitesse de déplacement du point mobile sur la courbe est donnée par le *vecteur vitesse* que l'on peut calculer simplement en dérivant les deux composantes de la solution

$$V = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

et plus sa longueur $\|V\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ est grande et plus la courbe est parcourue rapidement.

2 Etude qualitative du système

Comment détermine-t-on les solutions d'un système différentiel ? Parfois, mais c'est rare (tout comme, on l'a vu, dans le cas des équations différentielles uniques), il est possible de calculer, si l'on se donne une condition initiale $(x(0), y(0))$, une expression exacte de la solution $(x(t), y(t))$ issue de cette condition initiale et de tracer la courbe paramétrée correspondante dans le plan. Mais même lorsque ce n'est pas possible, on peut avoir une idée du comportement des solutions en procédant à une *étude qualitative*. Elle repose sur l'observation suivante : en chaque point (x, y) il passe une courbe solution¹ et une seule mais, bien qu'on ne la connaisse pas, on connaît son vecteur tangent $V(x, y)$ en tout point car il est donné par le système différentiel $V(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Le système différentiel nous donne donc en fait un *champs de vecteurs* dans le plan (c'est-à-dire un vecteur vitesse en tout point) comme indiqué sur la gauche de la figure suivante.



Toute courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ qui est une solution du système différentiel est en effet tangente en chacun de ses points au vecteur $(f(x, y), g(x, y))$. L'étude qualitative consiste à déterminer, à partir d'un examen du système, un *aperçu du champs de vecteurs* d'où l'on déduit ensuite *l'allure de courbes solutions*. Pour cela on remarque que si en un point $f(x, y) = 0$, le vecteur sera vertical en ce point, et de même si $g(x, y) = 0$, il sera horizontal. On en déduit que la courbe d'équation $g(x, y) = 0$, appelée *isocline horizontale*, est une courbe sur laquelle les solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ ont une tangente horizontale. De même la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, appelée *isocline verticale*, est une courbe sur laquelle les solutions $t \mapsto (x(t), y(t))$ ont une tangente verticale. Les points d'intersections de ces deux isoclines sont les *équilibres* (x^*, y^*) du système c'est-à-dire les points tels que la trajectoire issue d'un tel point reste en ce point pour tout t (car si $x'(t)$ et $y'(t)$ sont nuls, $x(t)$ et $y(t)$ sont constants).

Dans chacune des régions du plan délimitées par les deux isoclines horizontales et verticales, les quantités $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont de signe constant et on peut schématiser la direction du champs de vecteurs par une flèche de l'un des quatre types suivants : vers la droite et vers le haut (si $f > 0$ et $g > 0$), vers la droite et vers le bas (si $f > 0$ et $g < 0$), vers la gauche et vers le haut (si $f < 0$ et $g > 0$), ou vers la gauche et vers le bas (si $f < 0$ et $g < 0$). La position des équilibres (à l'intersection des isoclines), la représentation des deux isoclines verticale et horizontale, le schéma des flèches du champs de vecteurs, et la propriété qu'ont les trajectoires de ne jamais se croiser, permettent alors *l'étude qualitative* du système d'où l'on pourra le plus souvent déduire l'allure des solutions en fonction de leur condition initiale $(x(0), y(0))$.

Pour le modèle de Lotka-Volterra, une telle étude qualitative révèle la présence d'un équilibre $(x^*, y^*) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ à l'intersection de l'isocline horizontale $-\alpha_2 + \beta_2 x = 0$ et verticale $\alpha_1 - \beta_1 y = 0$ et montre également que les trajectoires tournent autour de cet équilibre, comme sur la partie gauche de la figure précédente. Dans l'exemple, l'isocline verticale est la droite d'équation $x = 3$, l'isocline horizontale la droite d'équation $y = 2$ et l'équilibre est le point $(3 ; 2)$.

Notons toutefois que l'étude qualitative d'un système tel que celui de Lotka Volterra ne permet pas de s'assurer que les trajectoires se referment bien après avoir fait le tour du point d'équilibre (et qu'elles ne vont pas plutôt spiraler vers l'intérieur ou vers l'extérieur...). Nous verrons plus loin comment surmonter ce type de difficulté.

¹C'est en effet un résultat théorique qui permet d'affirmer que, pourvu que le système différentiel soit suffisamment régulier, il passe, par tout point du plan, une courbe solution et une seule (courbes qui ne se croisent donc jamais).