Préparation à l'Agrégation de Mathématiques
Année 2008-2009

Rapidité de convergence des suites

Définition. *Soit une suite* (u_n) *qui converge vers* l.

(1) *On dit que la suite* (u_n) *converge* lentement *vers* l *si il existe* A, $\alpha > 0$ *tels que* $|u_n - l| \geq \dfrac{A}{n^\alpha}$.

(2) *On dit que la suite* (u_n) *converge* géométriquement *vers* l *si* $|u_n - l|$ *est dominée par une suite* k^n *avec* $0 < k < 1$.

(3) *On dit que la suite* (u_n) *converge* avec une convergence quadratique *vers* l *si* $|u_n - l|$ *est dominée par une suite* k^{2^n} *avec* $0 < k < 1$.

(4) *Plus généralement, on dit que la suite* (u_n) *converge* avec une convergence d'ordre $r > 1$ *vers* l *si* $|u_n - l|$ *est dominée par une suite* k^{r^n} *avec* $0 < k < 1$.

Une autre définition possible (qui implique la première mais qui ne lui est pas équivalente) :

Définition. *Soit une suite* (u_n) *qui converge vers* l. *On suppose qu'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1} - l|}{|u_n - l|} = k$.

(1) *Si* $k = 1$, *on dit qu'il y a* convergence lente.

(2) *Si* $0 < k < 1$, *on dit qu'il y a* convergence géométrique.

(3) *Si* $k = 0$, *on dit qu'il y a* convergence rapide.

1. Exercices

Exercice 1 : Suites diverses

1.1. Montrer que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est la rapidité de la convergence ?

1.2. a. Quelle est la rapidité de la convergence de $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers e ?

b. Quelle est la rapidité de la convergence de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers e ?

1.3. a. Quelle est la limite des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ et $T_n = 2^n \tan\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$? Quelle est leur rapidité de convergence ?

b. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \dfrac{2}{3}S_n + \dfrac{1}{3}T_n$ (méthode de Romberg-Richardson). Quelle est sa limite et sa vitesse de convergence ?

1.4. a. Quelle est la limite de la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}(u_n^2 - 2)$ avec $u_0 \in [1, \sqrt{2}]$? Quelle est sa rapidité de convergence ?

b. Quelle est la limite de la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ avec $u_0 > 0$? Quelle est sa rapidité de convergence ?

1.5. Quelle est la limite et la vitesse de convergence de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \arctan(u_n)$?

1.6. [G] Soit a_n l'unique racine positive de $X^n + X^{n-1} + \cdots + X^2 + X - 1$, $n > 0$. Quelle est la limite et la vitesse de convergence de la suite $(a_n)_n$?

1.7. [FGN1, p. 116] Soit a_n la plus grande racine de $X^{2n}-2nX+1$. Donner un développement asymptotique à deux termes de a_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 [L] : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $f(x) = x(1 - ax^\alpha \varphi(x))$ où $a > 0$ et $\alpha > 0$ et $\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = 1$.

a. Montrer que pour u_0 assez petit, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par u_0 et la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers 0.

b. Prouver que $u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \sim a\alpha$ quand $n \to +\infty$. En déduire que $u_n \sim \dfrac{K}{n^{1/\alpha}}$ quand $n \to +\infty$ où K est une constante.

c. Application aux suites : $u_{n+1} = \sin(u_n)$ ($u_0 = \dfrac{\pi}{2}$), $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ ($u_0 = 1$) et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ ($u_0 > 0$).

Exercice 3 : Variations sur la méthode de Newton

3.1. [S] a. Montrer que si une suite (r_n) de nombres positifs ou nuls vérifie $r_0 < 1$ et $r_{n+1} \leq r_n^2$, alors cette suite converge vers 0 et on a $r_n \leq (r_0)^{2^n}$.

b. En déduire le théorème de convergence de la méthode de Newton :

Théorème. *Soit f une fonction de $C^2([a,b], \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = 0$ et $f'(x) \neq 0$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y^0 \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, la suite des itérées de la méthode de Newton définies par $y^{n+1} = y^n - \dfrac{f(y^n)}{f'(y^n)}$ soit bien définie, reste dans l'intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et converge vers x quand n tend vers $+\infty$.*

3.2. [C] Dans le cas où f est le polynôme $f = \prod_{i=1}^{r} (X - x_r)^{m_r}$, montrer que si $y^0 > x_r$, la suite définie par la méthode de Newton est décroissante et converge vers x_r. Que dire de la vitesse de convergence si $m_r > 1$?

3.3. [S] a. Montrer que si une suite (r_n) de nombres positifs ou nuls vérifie $r_0 < 1$, $r_1 < 1$ et $r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}$, alors cette suite est bornée par 1, converge vers 0 et on a $r_n \leq Cr^{\rho^n}$ avec $r < 1$ et $\rho = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

b. En déduire le théorème de convergence de la méthode de la sécante, analogue du théorème précédent pour les itérations $y^{n+1} = y^n - \dfrac{f(y^n)}{f[y^n, y^{n-1}]}$, où $f[y^n, y^{n-1}] = \dfrac{f(y^n) - f(y^{n-1})}{y^n - y^{n-1}}$.

2. Indications

Exercice 1

1.4.b. Poser $r_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$.

1.7. Poser $a_n = 1 + \varepsilon_n$.

3. Références

[C] Chambert-Loir, Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2* , Masson.

[F] Francinou, Gianella, Nicolas, *Exercices de mathématiques. Oraux X-ENS. Analyse 1*, Cassini.

[G] Gostiaux, *Cours de mathématiques spéciales. Tome 3*, PUF.

[L] Leichtnam, *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS. Tome Analyse*, Ellipses.

[S] Schatzman, *Analyse numérique*, Dunod.